Г. И. Дринфельд

ДОПОЛНЕНИЯ К ОБЩЕМУ КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Издательство
Харьковского Университета

Г. И. ДРИНФЕЛЬД

ДОПОЛНЕНИЯ К ОБЩЕМУ КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Допущено Министерством высшего
образования УССР в качестве учебного пособия
для студентов математических
специальностей университетов УССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1958

Книга предназначена как учебное пособие для самостоятельной работы студентов. В нее включены вопросы, которые по разным причинам невозможно во всех подробностях изложить для всей аудитории. Таковы вопросы: пример непрерывной нигде недифференцируемой функции; обоснование различных способов разложения функций в степенные ряды; приведение квадратичной формы к главным осям как задача на экстремум; полная теория условного экстремума; пример элементарной функции, разлагающейся в тригонометрический ряд, но не в ряд Фурье (пример Перрона), и др.

Ответственный редактор доцент
Н. С. Ландкоф

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой работе собраны некоторые дополнения к университетскому курсу математического анализа, разбросанные в различных книгах и статьях, не всегда доступных студентам. Дополнения в основном относятся к вопросам, которые в университетском курсе нельзя обойти молчанием и которые в то же время нет возможности подробно рассмотреть на лекциях.

Было бы неразумно, по мнению автора, издавать большую книгу дополнений. Весьма возможно, однако, что некоторые избранные им темы следовало бы заменить другими. Автор будет благодарен за всякие замечания по этому поводу, так же как и за замечания, касающиеся изложения.

Автор воспользовался рядом ценных советов Н. И. Ахиезера, Л. Я. Гиршвальда и Н. С. Ландкофа, которым выражает глубокую признательность.

ГЛАВА I

§ 1. Всюду на отрезке разрывная функция, принимающая все промежуточные, между наибольшим и наименьшим, значения

Легко понять, что известные свойства непрерывной функции: сохранение знака, ограниченность на отрезке, существование и достижимость наибольшего и наименьшего значений, не являются (ни порознь, ни в совокупности) присущими только непрерывной функции. Не трудно также построить примеры функций, разрывных в отдельных точках отрезка $[a, b]$ и обладающих свойством принимать все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Вот пример такой функции:

Рис. 1.

$$y = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ -2x + \frac{5}{2}, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1; \\ x - \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 1.

Труднее представить себе, что существует всюду на отрезке $[a, b]$ разрывная функция, обладающая всеми упомянутыми свойствами непрерывной функции, включая свойство принимать все промежуточные, между наибольшим и наименьшим, значения. Однако такие функции существуют

Настоящий параграф посвящается построению соответствующего примера.

1. Определение функции $\omega(x)$. Для определенности возьмем отрезок $[0, 1]$. Каждое значение x из $[0, 1]$ будем записывать в виде бесконечной десятичной дроби

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$$

Обозначим через m число нулей среди цифр $x_1, x_2, \dots x_n$ и положим

$$\omega(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

Легко видеть, что на $[0, 1]$ существуют точки, в которых функция $\omega(x)$ определена, равно как и точки, в которых она не определена. Действительно, если, например,

$$x = 0{,}010101 \dots,$$

то $m = \frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$ в зависимости от четности или нечетности n. В обоих случаях

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

и $\omega(x) = \frac{1}{2}$.

Легко показать, что в каждой рациональной точке r функция $\omega(x)$ определена. Действительно, если r рациональное число, то его можно представить в виде бесконечной периодической дроби

$$r = 0, a_1 \dots a_k (b_1 \dots b_l)$$

(напоминаем, что конечная десятичная дробь рассматривается как периодическая с нулем в периоде).

При

$$n = k + sl + p, \quad s > 0, \quad 0 \leq p < l$$

будем иметь

$$m = m_1 + sm_2 + m_3,$$

где m_1 — число нулей среди цифр $a_1, \dots a_k$; m_2 — число нулей среди цифр $b_1, \dots, b_l$; m_3 — число нулей среди цифр $b_1, \dots, b_p$.

Таким образом,

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1 + sm_2 + m_3}{k + sl + p}$$

и так как при $n \to \infty$. только $s \to \infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = \frac{m_2}{l}.$$

Следовательно,

$$\omega(r) = \frac{m_2}{l}.$$

В частности, если r — конечная десятичная дробь, то $\omega(r) = 1$.

Если же, например,

$$x_1 = 0{,}1001001100001111000000001\dots,$$

то при $n = 4{,}8{,}16, \dots, 2.2^k, \dots$ имеем $m = 2{,}4, \dots, 2^k \dots$,
а при $n = 6{,}12{,}24, \dots, 3.2^k, \dots$ имеем $m = 4{,}8, \dots, 2.2^k, \dots$

и, следовательно, для первой последовательности значений n имеем $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, а для второй $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$. Значит предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

не существует и $\omega(x)$ в точке x_1 не определена.

2. Свойства функции $\omega(x)$.

1°. *Функция* $\omega(x)$ *неотрицательна.* Действительно, $\frac{m}{n} \geqslant 0$ и если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n}$, то он является неотрицательным числом.

2°. *Функция* $\omega(x)$ *ограничена.* Действительно,

$$0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1,$$

и поэтому

$$0 \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} \leqslant 1.$$

3°. *Функция* $\omega(x)$ *достигает своего наибольшего значения* (1) *и наименьшего значения* (0). Действительно, например, при $x = 0{,}11\dots$, $\omega(x) = 0$, а при $x = 0{,}22000\dots$, $\omega(x) = 1$.

4°. *Функция* $\omega(x)$ *принимает все промежуточные между* 0 *и* 1 *значения.* Действительно, пусть

$$0 < l < 1.$$

Всегда можно найти такую последовательность рациональных чисел

$$l_1,\ l_2, \ldots,\ l_n, \ldots,$$

что

$$\lim_{k \to \infty} l_k = l.$$

Составим бесконечную десятичную дробь

$$\overline{x} = 0,\ \alpha_{11}\,\alpha_{21}\,\alpha_{22}\,\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{33}\ldots\alpha_{\nu 1}\,\alpha_{\nu 2}\ldots\alpha_{\nu\nu}\ldots,$$

так, чтобы в группе цифр $\alpha_{\nu 1},\ \alpha_{\nu 2}, \ldots \alpha_{\nu\nu}$ было точно $[\nu l_\nu]$ нулей (знак $[A]$, как обычно, обозначает целую часть A). n-й десятичный знак нашей дроби будет принадлежать некоторой, пусть ν-й, группе цифр. Поэтому

$$1+2+\ldots+(\nu-1) < n \leqslant 1+2+\ldots+\nu$$

$$[l_1]+[2l_2]+\cdots+[(\nu-1)\,l_{\nu-1}] \leqslant m \leqslant [l_1]+[2l_2]+\cdots+[\nu\, l_\nu].$$

Отсюда находим

$$\frac{[l_1]+[2l_2]+\ldots+[(\nu-1)l_{\nu-1}]}{1+2+\cdots+\nu} \leqslant \frac{m}{n} < \frac{[l_1]+[2l_2]+\cdots+[\nu\, l_\nu]}{1+2+\cdots+(\nu-1)}.$$

На основании теоремы Штольца, гласящей*, если $b_n \to \infty$, когда $n \to \infty$, $b_{n+1} > b_n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n};$$

когда второй из этих пределов существует, имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{[l_1]+[2l_2]+\ldots+[\nu l_\nu]}{1+2+\cdots+(\nu-1)} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{[(\nu+1)\,l_{\nu+1}]}{\nu} =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{(\nu+1)\,l_{\nu+1}}{\nu} - \frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right] = \lim_{\nu\to\infty} l_{\nu+1} = l,$$

так как $0 \leqslant \varepsilon_\nu < 1$.

Точно так же

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{[l_1]+[2l_2]+\cdots+[(\nu-1)\,l_{\nu-}]}{1+2+\cdots+\nu} = l.$$

Следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = l.$$

Таким образом,

$$\omega(\overline{x}) = l$$

и наше утверждение доказано.

---

* См., например, Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1949, т. I, стр. 81.

5°. *Повторяемость значений функции* $\omega(x)$. Функция $\omega(x)$ обладает следующим замечательным свойством: пусть в определенной точке ξ отрезка $[0,1]$ $\omega(\xi)=a$ или не определена, тогда в сколь угодно малой окрестности любой точки $\bar{x}$ отрезка $[0,1]$ найдется точка η, в которой, соответственно, $\omega(\eta)=a$ или не определена. Таким образом, каждое свое значение функция принимает неограниченное число раз и неограниченное же число раз $\omega(x)$ не определена. Действительно, пусть

$$\xi=0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots$$

$$\bar{x}=0,\ \beta_1\beta_2\dots\beta_k\dots$$

При заданном ε, возьмем фиксированное k настолько большим, чтобы было

$$\frac{1}{10^k}<\varepsilon.$$

Положим

$$\eta=0,'\beta_1\beta_2\dots\beta_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_n\dots$$

Тогда

$$|\eta-\bar{x}|=0,0\dots0\gamma_1\gamma_2\dots<\frac{1}{10^k}<\varepsilon.$$

В то же время число m нулей среди первых n десятичных знаков числа η отличается от числа m_1 нулей среди первых n десятичных знаков числа ξ не более чем на (фиксированное!) k. Следовательно, либо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{m_1}{n},$$

либо оба предела не существуют, т. е. $\omega(\eta)=\omega(\xi)$, либо оба эти значения функции $\omega(x)$ не существуют.

6°. *Разрывность функции* $\omega(x)$ *всюду на* $[0,1]$. Мы докажем теперь, что $\omega(x)$ разрывна всюду на $[0,1]$. Возьмем произвольную точку $\bar{x}$ на отрезке $[0,1]$. Если $\omega(x)$ не определена в точке $\bar{x}$, то она заведомо разрывна в этой точке. Если же $\omega(\bar{x})=a$, $0\leqslant a\leqslant 1$, то с одной стороны найдется такое фиксированное, положительное или отрицательное, число α, что будет

$$0\leqslant a+\alpha\leqslant 1,$$

а с другой — на основании свойства 4° функции $\omega(x)$ — такое ξ, $0\leqslant\xi\leqslant 1$, что $\omega(\xi)=a+\alpha$. В силу свойства 5°, в любой сколь угодно малой окрестности точки $\bar{x}$ найдется точка η, в которой $\omega(\eta)=a+\alpha$. Таким образом, будет $|\bar{x}-\eta|<\delta$, где δ — произвольно мало и в то же время $\omega(\eta)-\omega(\bar{x})=\varkappa$, где α — фиксировано (конечно). Следовательно, $\bar{x}$ является точкой разрыва нашей функции.

Замечание. Из наших рассуждений следует, что колебание функции $\omega(x)$ не мало на сколь угодно малом интервале. Поэтому, даже дополнив определение функции, задав ее в точках, где она не определена, мы не получим непрерывной функции, как бы мы не доопределили функцию $\omega(x)$.

§ 2. Непрерывные нигде недифференцируемые функции

Около 1830 г. чешский ученый Больцано показал, что существуют непрерывные нигде недифференцируемые функции. Однако рукопись Больцано была обнаружена лишь в 1920 г., и долгое время исторически первым примером непрерывной нигде недифференцируемой функции считался пример, найденный в 1871 г. Вейерштрассом. В настоящее время существует много примеров непрерывных нигде недифференцируемых функций. Простейшим из них является пример Ван-дер-Вардена, который будет подробно рассмотрен ниже.

1. Функция Больцано*. Условимся называть B-операцией над двумя точками $A(p,\ q)$, $B(p+\alpha,\ q+\beta)$ построение пяти точек: $A(p,\ q)$, $C\left(p+\frac{\alpha}{4},\ q-\frac{\beta}{2}\right)$, $D\left(p+\frac{\alpha}{2},\ q\right)$ $E\left(p+\frac{3\alpha}{4},\ q+\frac{\beta}{2}\right)$, $B(p+\alpha,\ q+\beta)$. Легко проверить, что точки C, D, E, B лежат на одной прямой.

Обозначим через $B_0(x)$ функцию, графиком которой является отрезок прямой, соединяющий точки $A_{11}(0{,}0)$ и $A_{22}(1{,}1)$. Применив к этим точкам B-операцию, получим точки $A_{21}(0{,}0)$, $A_{22}\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\right)$, $A_{23}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $A_{24}\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)$, $A_{25}(1{,}1)$ и тогда определим функцию $B_1(x)$, полагая, что ее графиком является ломаная $A_{21}A_{22}\dots A_{25}$. На рис. 2*а* изображены графики функций $B_0(x)$ и $B_1(x)$. Применив B-операцию к каждой паре точек A_{21}, A_{22}; A_{22}. A_{23};... получим точки $A_{31}(0{,}0)$, $A_{32}\left(\frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4}\right)$, $A_{33}\left(\frac{2}{4^2},\ 0\right)$, $A_{34}\left(\frac{3}{4^2},\ -\frac{1}{4}\right)$, $A_{35}\left(\frac{4}{4^2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $A_{36}\left(\frac{5}{4^2},\ -\frac{3}{4}\right)$, $A_{37}\left(\frac{6}{4^2},\ -\frac{1}{2}\right)$, ...

---

* Функции Больцано и Вейерштрасса мы не рассматриваем подробно и не доказываем их недифференцируемость.

и определим функцию $B_2(x)$, полагая, что ее графиком является ломаная $A_{31}\ A_{32}\dots$. На рис. 2б изображены графики функций $B_1(x)$ и $B_2(x)$.

Продолжая этот процесс, придем к функции $B_n(x)$, графиком которой является ломаная с вершинами в точках, имеющих абсциссы 0, $\frac{1}{4^n}$, $\frac{2}{4^n}, \dots,$ $\frac{4^n-1}{4^n}$, 1. На рис. 2в изображены графики функций $B_2(x)$, $B_3(x)$.

Учитывая, что если $x=\frac{k}{4^n}=\frac{l}{4^p}, p>n$, то $B_n\left(\frac{k}{4^n}\right)=B_p\left(\frac{l}{4^p}\right)$ (например, точки A_{22} и A_{35} совпадают), мы однозначно определим функцию Больцано $B(x)$ при значениях x, равных

$$0, 1$$

$$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \qquad (1)$$

$$0, \frac{1}{4^2}, \frac{2}{4^2}, \dots \frac{15}{4^2}, 1,$$

. . . .

то есть при $x=\frac{k}{4^n}$ ($k=0, 1, 2, \dots 4^n$; $n=0, 1, 2, \dots$), полагая

$$B\left(\frac{k}{4^n}\right)=B_n\left(\frac{k}{4^n}\right).$$

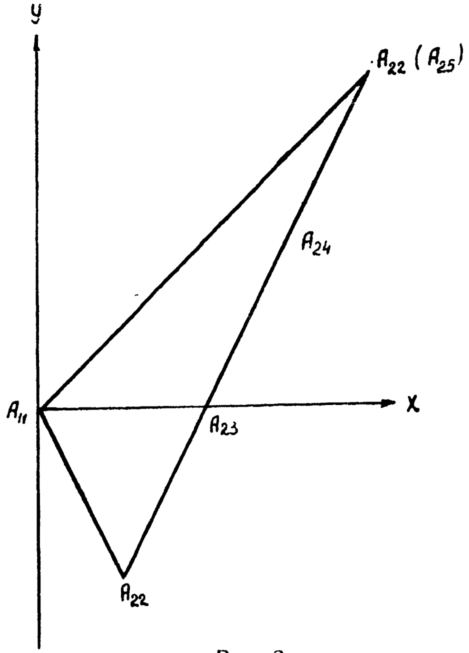

Рис. 2а.

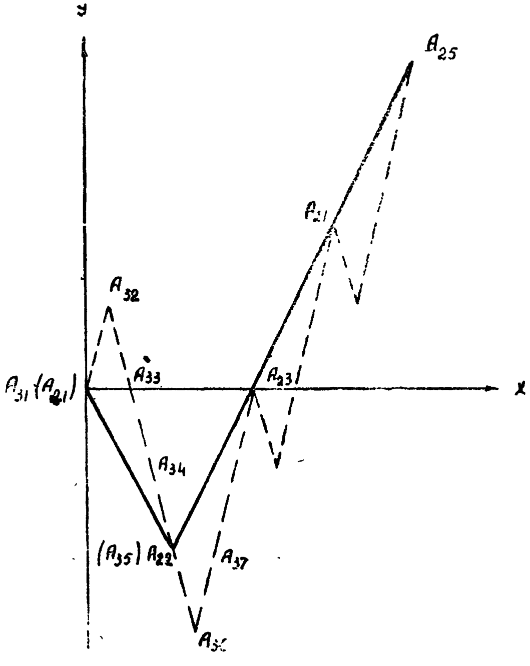

Рис. 2б.

Таким образом, график функции $B(x)$ проходит через вершины всех ломаных $B_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Можно показать, что любое значение x, если оно отлично от значений (1), может быть представлено как предел последовательности чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ из таблицы (1) и что существует предел

$$\lim_{m \to \infty} B(\alpha_m).$$

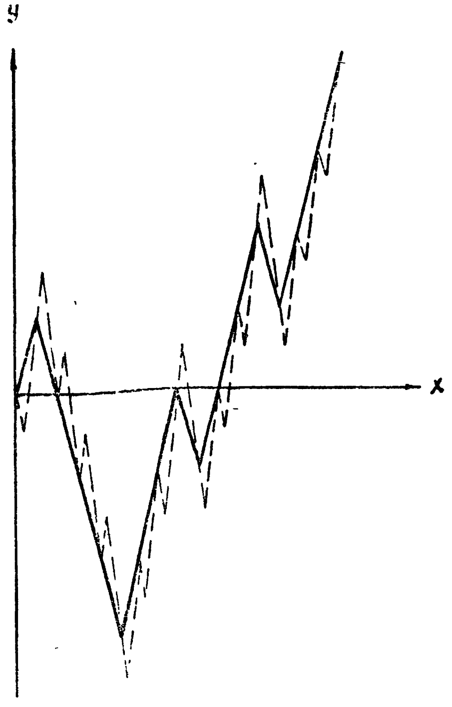

Рис. 2в.

Этот предел принимаем в качестве значения $B(x)$ при рассматриваемом значении x. Таким образом, функция Больцано определена на всем отрезке [0,1]. Оказывается, что эта функция непрерывна и нигде недифференцируема.

Доказательство этого факта несложно, его можно найти в статье В. Ф. Бржечка („Успехи мат. наук", 1949 г., т. IV, вып. 2).

2. **Функция Вейерштрасса.** Эта функция определяется формулой

$$W(x)=\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} b^k \cos \pi a^k x,$$

где $0 < b < 1$, a — целое нечетное число, удовлетворяющее условию

$$ab \geqslant 1 + \frac{3}{2} \pi.$$

Непрерывность функции $W(x)$ следует из приводимой на стр. 18 теоремы.

Достаточно простыми средствами можно доказать, что $W(x)$ нигде недифференцируема (см., например, Э. Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, т. II, Прибавление).

3. **Функции Пеано***. Рассмотрим на плоскости xOy квадрат K

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

и разобьем его на девять равных квадратов, которые занумеруем, как показано на рис. 3*а*, так что два квадрата, имеющие смежные номера, будут иметь общую сторону. Построенные квадраты будем называть квадратами 1-го ранга. Каждый квадрат 1-го ранга разобьем опять на девять квадратов 2-го ранга. Занумеруем квадраты 2-го ранга, принадлежащие одному и тому же квадрату 1-го ранга, цифрами 1, 2,... 9, заботясь о том, чтобы два квадрата 2-го ранга, имеющие смежные номера, имели общую сторону, и кроме того, чтобы квадрат 2-го ранга, получивший номер 9, имел общую сторону с квадратом 2-го ранга, получившим номер 1 и лежащим в следующем по номеру квадрате 1-го ранга. Это можно сделать, как указано на рис. 3*б*.

Далее, каждый квадрат 2-го ранга разобьем на девять квадратов 3-го ранга, которые будем нумеровать, исходя из тех же принципов. Этот процесс можно продолжить неограниченно. Заметим, что длина стороны квадрата n-го ранга будет равна $\frac{1}{3^n}$. Если точка A принадлежит основному квадрату K,

3	4	9
2	5	8
1	6	7

Рис. 3*а*.

3	4	9	1	6	7	3	4	9
2	5	8	2	5	8	2	5	8
1	6	7	3	4	9	1	6	7
9	4	3	7	6	1	9	4	5
8	5	2	8	5	2	8	5	2
7	6	1	9	4	3	7	6	1
3	4	9	1	6	7	3	4	9
2	5	8	2	5	8	2	5	8
1	6	7	3	4	9	1	6	7

Рис. 3*б*.

то она, очевидно, принадлежит хотя бы одному квадрату 1-го ранга, хотя бы одному квадрату 2-го ранга и т. д. (точка принадлежит не менее чем двум квадратам n-го ранга, если она лежит на границе какого-нибудь квадрата n-го ранга).

Если возьмем две различные точки A и B, принадлежащие основному квадрату K, то, начиная с некоторого достаточно большого n, они будут принадлежать двум различным

---

* Наше изложение до места, отмеченного на стр. 15 звездочкой, является точным воспроизведением изложения В. Немыцкого, М. Слудской и А. Черкасова („Курс математического анализа", т. I, М, 1944).

квадратам n-го ранга. Возьмем некоторую точку $A(x, y)$, принадлежащую основному квадрату K. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$,. соответственно, номера квадратов 1-го, 2-го,... n-го,... рангов, которым принадлежит точка A. Каждое σ_n может принять одно или несколько из значений $1, 2, \dots 9$. Таким образом, точке A соответствует по крайней мере одна последовательность чисел $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$, и обратно—каждой такой последовательности будет соответствовать одна точка квадрата K: точка, общая стягивающейся последовательности квадратов — квадрата 1-го ранга с номером σ_1, содержащегося в нем квадрата 2-го ранга с номером σ_2, содержащегося в последнем квадрате 3-го ранга с номером σ_3, и т. д. При этом двум различным точкам из квадрата K будут соответствовать две различные последовательности. Однако, двум различным последовательностям может соответствовать и одна точка квадрата. Например, последовательности

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 1,\ 1,\ 1, \dots 1, \dots,$$

$$2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 9,\ 9,\ 9, \dots 9, \dots$$

определяют одну и ту же точку квадрата K. Действительно, благодаря выбранному способу нумерации квадратов, квадраты 6-го ранга с номерами 1 и 9 имеют общую сторону, квадраты 7-го ранга с теми же номерами имеют общую сторону и т. д. Длины этих сторон стремятся к нулю и поэтому общая точка всех квадратов, определяемая первой последовательностью, совпадает с общей точкой всех квадратов, определяемых второй последовательностью. Теперь рассмотрим отрезок (рис. 4) I:

$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Разобьем этот отрезок на девять равных частей, которые нумеруем слева направо цифрами $1, 2, \dots 9$ и назовем отрезками 1-го ранга. Каждый отрезок первого ранга разделим на 9 равных отрезков 2-го ранга, которые опять занумеруем слева направо цифрами $1, 2 \dots 9$ и т. д. Каждая точка отрезка I попадет в один, в крайнем случае—в два отрезка первого ранга, в один или два отрезка второго ранга и т. д.

Таким образом, каждой точке a отрезка I будет соответствовать хотя бы одна последовательность чисел $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$ ($\sigma_i = 1, 2, \dots 9$) и обратно, каждой такой последовательности будет соответствовать точка отрезка I.

Возьмем некоторую точку B, принадлежащую отрезку I. Если она не является концом некоторого отрезка n-го ранга, то ей соответствует только одна единственная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ Если эта точка является концом отрезка ранга n, то ей будут соответствовать две последовательности, именно:

$$1)\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n,\ 1,\ 1, \ldots 1, \ldots$$

$$2)\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{n-1},\ 9,\ 9, \ldots$$

Значит можно поставить в соответствие каждой точке B, принадлежащей отрезку I, одну единственную точку A квадрата K, именно ту, которая определяется той же последовательностью $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, что и точка B отрезка I, или теми же двумя последовательностями 1) и 2).

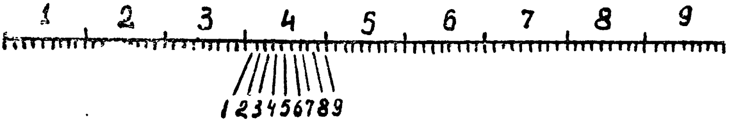

Рис. 4.

Пусть точка B отрезка имеет абсциссу t, а точка A квадрата имеет координаты x и y. Тогда в силу сказанного выше числу $t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ соответствует одно определенное число x и одно определенное число y, т. е. мы имеем однозначные функции

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t).$$

Докажем, что эти функции непрерывны. В самом деле, если возьмем два значения t_1 и t_2 такие, что $|t_1 - t_2| < \frac{1}{9^n}$, то это значит, что они попали в один или два смежных отрезка ранга n. Но тогда соответствующие точки квадрата K будут расположены в одном или двух смежных квадратах ранга n; поэтому разность абсцисс этих точек по абсолютной величине не сможет превзойти $2/3^n$, т. е.

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \frac{2}{3^n}.$$

Пусть теперь задано положительное число ε. Возьмем n настолько большим, чтобы $2/3^n < \varepsilon$; приняв за δ число $1/9^n$, получим, что из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$ следует неравенство $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$. Это и доказывает непрерывность функции $\varphi(t)$ *.

Функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ назовем функциями Пеано. Кривой Пеано называется кривая, заданная в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t).$$

Эта кривая заполняет весь квадрат K в том смысле, что она проходит через каждую точку квадрата.

Чтобы получить наглядное представление о функциях Пеано и тем самым, с одной стороны, получить наглядное представление о причине, по которой эти функции, как будет показано, нигде недифференцируемы, а с другой—лучше уяснить себе процесс, с помощью которого точкам отрезка I приводятся (однозначно!) в соответствие точки квадрата, поступим следующим образом.

Положим $t=0$. Точка отрезка I является точкой отрезка 1-го ранга с номером 1, точкой отрезка 2-го ранга с номером 1, точкой отрезка n-го ранга с номером 1 и т. д. Соответствующая точка квадрата K должна находиться в квадрате 1-го ранга с номером 1, в квадрате второго ранга с тем же номером и т. д. Следовательно (см. рис. 3), это будет точка (0,0). Теперь положим $t=\frac{1}{9}\cdot$ Точка отрезка I принадлежит первому отрезку 1-го ранга и девятому отрезку каждого из последующих рангов. Соответствующая точка квадрата K должна находиться в первом квадрате 1-го ранга и в девятом квадрате каждого из последующих рангов. Следовательно, это будет точка (1/3, 1/3).

Далее положим $t=\frac{2}{9}$. Точка отрезка I лежит во втором отрезке 1-го ранга и в девятом отрезке каждого из последующих рангов. Соответствующей точкой квадрата K будет точка (0,2/3).

Продолжая таким образом, получим таблицу

t	0	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	1
$x(t)$	0	1/3	0	1/3	2/3	1/3	2/3	1	2/3	1
$y(t)$	0	1/3	2/3	1	2/3	1/3	0	1/3	2/3	1

Мы можем теперь построить 10 точек графика функции $x=\varphi(t)$ и, соединив эти точки отрезками прямых, получить ломаную, являющуюся первым приближением кривой $x=\varphi(t)$ (рис. 5).

Второе приближение кривой $x=\varphi(t)$ можно построить подобным образом, разбивая каждый отрезок $\frac{i}{9}\leqslant t\leqslant\frac{i+1}{9}$ снова на 9 равных частей. Это приближение имеет вид, указанный на рис. 6, и уже оно подсказывает, что функция $\varphi(t)$ может быть нигде недифференцируемой. Мы докажем теперь, что это действительно так.

Для этого заметим, что, во-первых, длина стороны квадрата n-го ранга равна $1/3^n$, а длина отрезка n-го ранга равна

$1/9^n$, и, во-вторых, что каждому интервалу $\left(\frac{\alpha}{9^n}, \frac{\alpha+1}{9^n}\right)$ изменения значения t соответствует интервал $\left(\frac{\alpha}{3^n}, \frac{\alpha+1}{3^n}\right)$ изменения функции $x=\varphi(t)$.

Любое значение t_0 аргумента t принадлежит интервалу вида $\left(\frac{\alpha}{9^n}, \frac{\alpha+1}{9^n}\right)$, где n — сколь угодно велико.

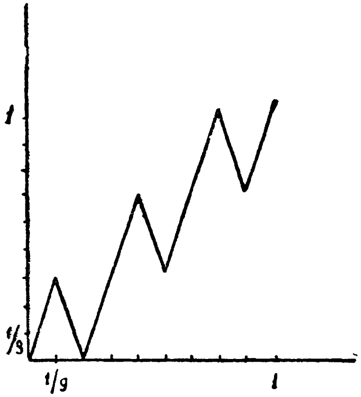

Рис. 5.

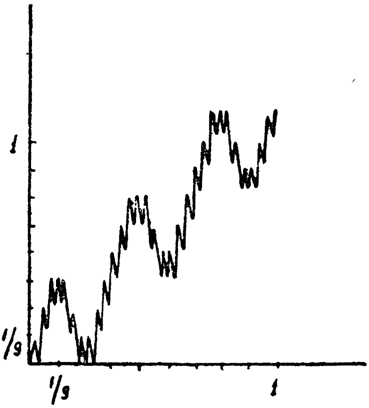

Рис. 6.

Возьмем h так, чтобы было $|h| \leqslant \frac{2}{9^n}$ и в то же время

$$|x(t_0+h)-x(t_0)| \geqslant \frac{1}{2\cdot 3^n}. \tag{1}$$

Это возможно, так как первое условие позволяет взять точку t_0+h в отрезке n-го ранга, смежном с отрезком n-го ранга, содержащем точку t_0. Следовательно, точку $(x(t_0+h), y(t_0+h))$, можно, если понадобится, взять в квадрате n-го ранга, примыкающем к квадрату n-го ранга, содержащему точку $(x(t_0), y(t_0))$, и тем самым всегда обеспечить возможность неравенства (1).

Следовательно, будет

$$\left|\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right| \geqslant \frac{1}{4}3^n.$$

Отсюда и следует, что отношение

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$$

не имеет конечного предела, т. е., что функция $x=\varphi(t)$ недифференцируема в произвольной точке t_0.

4. Пример Ван-дер-Вардена. Докажем предварительно одну теорему о пределах.

Теорема*. *Пусть функции*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x), \ldots \qquad (2)$$

непрерывны на $[a,\ b]$ *и на этом отрезке*

$$|\varphi_1(x)| \leqslant a_1, \quad |\varphi_2(x)| \leqslant a_2, \ldots, \quad |\varphi_n(x)| \leqslant a_n, \ldots, \qquad (3)$$

причем существует предел

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n). \qquad (4)$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)] \qquad (5)$$

и этот предел является непрерывной на отрезке $[a, b]$ *функцией.* Из существования предела (4), на основании критерия Коши, следует, что для всякого наперед данного положительного ε

$$|(a_1+\ldots+a_m)-(a_1+\ldots+a_n)|<\varepsilon,\ m,\ n \geqslant,\ N(\varepsilon)$$

и, следовательно, если для определенности положить $n>m$,

$$a_{m+1}+\ldots+a_n<\varepsilon.$$

Но тогда для каждого значения x имеем

$$|[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_m(x)]-[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_{m+1}(x)|+\ldots+|\varphi_n(x)| \leqslant a_{m+1}+\ldots+a_n<\varepsilon,\ m,\ n \geqslant N(\varepsilon) \quad (6)$$

и на основании того же критерия Коши заключаем, что существует предел (5). Обозначим этот предел через $\psi(x)$ и докажем, что $\psi(x)$ — непрерывная функция. Действительно, положим

$$\psi(x)=\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_m(x)+R_m(x)=S_m(x)+R_m(x).$$

Легко видеть, что

$$|R_m(x)|<\varepsilon,\ m \geqslant N(\varepsilon) \qquad (7)$$

для всех значений x из $[a,\ b]$. Действительно,

$$R_m(x)=\lim_{n\to\infty}[\varphi_{m+1}(x)+\ldots+\varphi_n(x)].$$

Но тогда из неравенства (6) следует (7).

---

* Если читатель уже знаком с понятием равномерной сходимости функционального ряда и с основными теоремами, относящимися к таким рядам, то теорему можно опустить.

Из равенств

$$\psi(x+h)=S_m(x+h)+R_m(x+h),$$
$$\psi(x)=S_m(x)+R_m(x)$$

следует

$$\psi(x+h)-\psi(x)=[S_m(x+h)-S_m(x)]+R_m(x+h)-R_m(x),$$
$$|\psi(x+h)-\psi(x)|\leqslant|S_m(x+h)-S_m(x)|+|R_m(x+h)|+|R_m(x)|.$$

Из неравенства (7) и из непрерывности $S_m(x)$ как суммы конечного числа непрерывных функций следует тогда, что

$$|\psi(x+h)-\psi(x)|<3\varepsilon,$$

если $|h|$ меньше надлежаще выбранного $\delta<0$.

Переходим к изложению примера Ван-дер-Вардена.

Обозначим через $\{v\}$ модуль разности между v и ближайшим к нему целым числом и рассмотрим на $[0,1]$ последовательность функций

$$\frac{\{10x\}}{10},\ \frac{\{10x\}}{10}+\frac{\{10^2x\}}{10^2},\ \dots,\ \frac{\{10x\}}{10}+\frac{\{10^2x\}}{10^2}+\dots+\frac{\{10^nx\}}{10^n},\ \dots \tag{8}$$

Докажем, что функция $\frac{\{10^kx\}}{10^k}$ непрерывна. Действительно, если $x=0,\ a_1a_2\dots a_m\dots$, то $10^kx=a_1\dots a_k,\ a_{k+1}\dots a_m\dots$ и $\{10^kx\}$ равно $0,\ a_{k+1}\dots a_m\dots$ или $1-0,\ a_{k+1}\dots a_m\dots$ в зависимости от того, будет ли $0,\ a_{k+1}\dots a_m\dots\leqslant\frac{1}{2}$ или $>\frac{1}{2}$. Соответственно, при

$$h=\pm0,\ \underbrace{0\dots0}_{m-1\ \text{раз}}\alpha_m\dots$$

будем иметь

$$\{10^k(x+h)\}=0,\ a_{k+1}\dots(a_m\pm\alpha_m)\dots$$

или

$$1-0,\ a_{k+1}\dots(a_m\pm\alpha_m)\dots$$

и, следовательно,

$$|\{10^k(x+h)\}-\{10^kx\}|\leqslant\frac{1}{10^{m-k-1}}<\varepsilon,$$

если m достаточно велико.

Теперь легко убедиться в существовании и непрерывности функции Ван-дер-Вардена

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\{10x\}}{10}+\dots+\frac{\{10^nx\}}{10^n}\right].$$

Это следует из теоремы, так как функции (8) непрерывны, как суммы конечного числа непрерывных функций, справедливо неравенство

$$\frac{\{10x\}}{10}+\dots+\frac{\{10^nx\}}{10^n}\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{10^n}\right\}=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{2\cdot9}<\frac{1}{18}$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}\right].$$

Докажем, что $f(x)$ *нигде недифференцируема.*

Пусть $x=0,\ a_1 a_2 \ldots a_p \ldots$ и $h_m=-10^{-m}$, если a_m равно 4 или 9, $h_m=10^{-m}$, если a_m отлично от 4 и 9.
Если $n \geqslant m$, то

$$\{10^n x\}=0,\ a_{n+1}\ldots \text{ или } 1-0,\ a_{n+1}\ldots$$

и, соответственно,

$$\{10^n (x+h_m)\}=0,\ a_{n+1}\ldots \text{ или } 1-0,\ a_{n+1}\ldots,$$

то есть

$$\{10^n (x+h_m)\}-\{10^n x\}=0.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\frac{1}{h_m}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\{10^n (x+h_m)\}-\{10^n x\}}{10^n}.$$

Но при $n \leqslant m-1$ имеем

$$10^n x = a_1 \ldots a_n,\ a_{n+1}\ldots a_m \ldots,$$

$$10^n (x+h_m)=10^n (x\pm 10^{-m})=a_1\ldots a_n,\ a_{n+1}\ldots (a_m\pm 1)\ldots$$

Если $\{10^n x\}=0,\ a_{n+1}\ldots a_m\ldots$, то в силу нашего условия относительно знака h_m даже при $n=m-1$ будет $\{10^n (x+h_m)\}=0,\ a_{n+1}\ldots (a_m\pm 1)\ldots$ Если же $\{10^n x\}=1-0,\ a_{n+1}\ldots a_m\ldots$, то $\{10^n (x+h_m)\}=1-0,\ a_{n+1}\ldots (a_m\pm 1)\ldots$ Поэтому

$$\frac{\{10^n (x+h_m)\}-\{10^n x\}}{10^n}=\frac{\pm 10^{n-m}}{10^n}=\pm 10^{-m}=h_m\text{[*]}.$$

---

[*] Так, например, если $m=3$, $n=2$ и

$$x=0,\ a_1 a_2 4a_4\ldots \text{ или } x=0,\ a_1 a_2 9a_4\ldots$$

то $h_3=-10^{-3}$ и

$$10^2 (x+h_3)=a_1 a_2,\ 3a_4\ldots \text{ или } 10^2 (x+h_3)=a_1 a_2,\ 8a_4\ldots;$$

$$\frac{\{10^2 (x+h_3)\}-\{10^2 x\}}{10^2}=\frac{0{,}3a_1\ldots-0{,}4a_4\ldots}{10^2}=-10^{-3}=h_3,$$

или

$$\frac{\{10^2 (x+h_3)\}-\{10^2 x\}}{10^2}=\frac{-0{,}1a_4\ldots+0{,}0a_4\ldots}{10^2}=-10^{-3}=h_3.$$

При $x=0,\ a_1 a_2 6a_4\ldots$ или $x=0,\ a_1 a_2 2a_4\ldots,\ h_3=10^{-3}$

$$10^2 (x+h_3)=a_1 a_2,\ 7a_4\ldots \text{ или } 10^2 (x+h_3)=a_1 a_2,\ 3a_4\ldots$$

$$\frac{\{10^2 (x+h_3)\}-\{10^2 x\}}{10^2}=\frac{-0{,}2a_4\ldots+0{,}3a_4\ldots}{10^2}=10^{-3}=h_3,$$

или

$$\frac{\{10^2 (x+h_3)\}-\{10^2 x\}}{10^2}=\frac{0{,}3a_4\ldots-0{,}2a_4\ldots}{10^2}=10^{-3}=h_3.$$

Следовательно,

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=m-1$$

и при $m \to \infty$ будет

$$h_m \to 0, \quad \frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} \to \infty .$$

Таким образом, функция $f(x)$ — недифференцируема.

ГЛАВА II

§ 1. Оценка коэффициентов степенного ряда

При решении многих задач математического анализа оказывается полезной теорема, дающая оценку коэффициентов разложения функции в ряд по степеням вещественной или невещественной переменной.

Теорема 1. *Если в круге радиуса R имеет место разложение*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots, + a_n z^n + \ldots, \quad |z| < R \qquad (1)$$

и

$$|f(z)| \leqslant M, \quad |z| < R,$$

то

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n},$$

где r — любое положительное число, меньшее R.

Для доказательства этого утверждения сделаем три предварительных замечания.

а) Если справедливо разложение (1), то справедливо и разложение

$$\overline{f(z)} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \ldots + \overline{a}_n \overline{z}^n + \ldots, \qquad (2)$$

где $\overline{a}$ означает число, сопряженное с a. Верность замечания следует из того, что

$$\overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \ldots + \overline{a}_n \overline{z}^n = \overline{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}.$$

б) При $|z| = |\overline{z}| \leqslant r < R$ ряды (1), (2) сходятся абсолютно и равномерно.

в) Если t — вещественная переменная и $\varphi(t)$ — комплексная функция

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t),$$

то, по определению,

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi_1(t)\,dt + i\int_a^b \varphi_2(t)\,dt.$$

В частности,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \int_0^{2\pi} \cos ktdt + i\int_0^{2\pi} \sin ktdt,$$

и если k — целое число, то

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k=0. \end{cases}$$

Переходим к доказательству теоремы. Положив $z = re^{it}$ и потом $y\overline{z} = re^{-it}$ и перемножив (на основании замечания б)) ряды (1) и (2), получим

$$f(re^{it})f(re^{-it}) = |f(re^{it})|^2 = \sum_{m,n} a_m\overline{a}_n r^{m+n} e^{i(m-n)t} .$$

Проинтегрировав на основании замечаний б) и в) последнее равенство в пределах $0,2\pi$, получим

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2dt = \sum_{m,n}\int_0^{2\pi} a_m\overline{a}_n r^{m+n}e^{i(m-n)t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\cdot 2\pi.$$

Следовательно,

$$2\pi r^{2n}|a_n|^2 \leqslant \int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2dt \leqslant M^2\cdot 2\pi,$$

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Замечание. Теорема (и доказательство) легко обобщается. Например, если

$$f(u,v) = \sum_{k,l} a_{kl}u^kv^l, \quad |u|<R_1, \quad |v|<R_2$$

и $|f(u, v)| \leqslant M$ при $|u|<R_1$, $|v|<R_2$, то

$$|a_{kl}| \leqslant \frac{M}{r_1^k r_2^l}; \quad r_1 < R_1, \quad r_2 < R_2.$$

§ 2. Мажорантные ряды и функции

Ряд

$$A_0 + A_1z + \ldots + A_nz^n + \ldots \tag{3}$$

с положительными коэффициентами называется мажорантным для ряда

$$a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n + \ldots,$$

если

$$|a_m| \leqslant A_m, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Очевидно утверждение:

Лемма 1. *Если ряд* (3) *сходится при* $|z|<R$, *то при тех же значениях* z *сходится и ряд* (4).

Почти очевидно и следующее, часто применяемое, утверждение

Лемма 2. *Пусть коэффициенты ряда*

$$b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n+\ldots \tag{5}$$

являются многочленами с положительными коэффициентами относительно коэффициентов ряда (4)

$$b_n=P_n(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) \tag{6}$$

и пусть ряд (3) *является мажорантным для ряда* (4) *Тогда ряд*

$$B_0+B_1z+\ldots+B_nz^n+\ldots,$$

где

$$B_n=P_n(A_{i_1},\ldots A_{i_k}),$$

является мажорантным для ряда (5).

Лемма сразу следует из того, что

$$|P_n(a_{i_1},\ldots,a_{i_k})|\leqslant P_n(A_{i_1},\ldots,A_{i_k}).$$

Если ряд (3) сходится к функции $f(z)$ и является мажорантным для ряда (4), то, как уже было подчеркнуто леммой 1, ряд (4) сходится к некоторой функции $\varphi(z)$. Функция $f(z)$ называется мажорантой функции $\varphi(z)$, что обозначается знаком $\ll$

$$\varphi(z)\ll f(z). \tag{7}$$

Из леммы 2 следует, что знание мажоранты для функции $\varphi(z)$ позволяет сразу найти мажоранту для функции, разлагающейся в ряд (5) с коэффициентами (6). В частности, из (7) следует:

$$\varphi^k(z)\ll f^k(z),\quad k=2,3,\ldots,$$

так как коэффициенты разложения функции $\varphi^k(z)$ в ряд имеют вид (6). Задача нахождения мажоранты для данной функции $\varphi(z)$ не имеет единственного решения хотя бы уже потому, что из (7) следует:

$$\varphi(z)\ll Af(z),\quad A>1.$$

Теорема предыдущего параграфа позволяет, и этим часто пользуются, весьма просто найти мажоранту функции, разлагающейся в ряд.

Теорема 1. *Если*

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots,\quad |z|<R \tag{8}$$

и

$$|f(z)|\leqslant M,\quad |z|<R.$$

то

$$f(z) \ll \frac{M}{1-\frac{z}{r}}, \quad r < R.$$

Действительно, так как

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n},$$

то ряд

$$M + \frac{M}{r} z + \ldots + \frac{M}{r^n} z^n + \ldots = \frac{M}{1-\frac{z}{r}}$$

является мажорантным для ряда (8).

Замечание 1. Если $a_0 = 0$, то

$$f(z) \ll \frac{M}{1-\frac{z}{r}} - M.$$

Замечание 2. Так как $f(0) = a_0$, то $M \geqslant |a_0|$.

Теорема 2. *Если имеет место разложение* (8) *и N—любое число, удовлетворяющее условию $N \geqslant |a_0|$, то, при надлежаще выбранном $\rho < R$, будет*

$$f(z) \ll \frac{N}{1-\frac{z}{\rho}}.$$

Действительно, пусть $\rho < r\frac{|a_0|}{M}$, тогда

$$\begin{aligned} |a_n| \rho^n = |a_n| r^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < M \left(\frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} < \\ < M \left(\frac{\rho}{r}\right) < a_0, \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Ряд

$$|a_0| + |a_1| |z + \ldots + |a_n| z^n + \ldots$$

очевидно является мажорантным для ряда (8). Следовательно, ввиду неравенств (9), мажорантным для ряда (8) будет ряд

$$|a_0| + \frac{|a_0|}{\rho} z + \ldots + \frac{|a_0|}{\rho^n} z^n + \ldots = \frac{|a_0|}{1-\frac{z}{\rho}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если $a_0=0$ и ρ достаточно мало, то

$$f(z) \ll \frac{N}{1-\frac{z}{\rho}} - N = \frac{N}{1-\frac{z}{\rho}}\ \frac{z}{\rho},$$

где N — любое положительное число.

§ 3. Некоторые способы разложения функций в степенные ряды

Известная теорема о том, что сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы, показывает, что в конечном счете разложить функцию в степенной ряд—это означает построить ее ряд Тэйлора (и доказать сходимость этого ряда к данной функции). Это не означает, однако, что для разложения функции в степенной ряд действительно необходимо пользоваться формулой Тейлора. Во многих случаях оказывается возможным и более удобным этой формулой не пользоваться.

Настоящий параграф посвящается изложению и обоснованию некоторых приемов разложения функций в степенные ряды. При этом мы не будем останавливаться на приемах, которые рассматриваются в обязательном курсе математического анализа и основаны на теоремах об умножении ряда на некоторый множитель, сложении и умножении рядов, интегрировании и дифференцировании рядов.

1°. Разложение сложной функции (подстановка ряда в ряд).

Теорема 3. *Если имеют место разложения*

$$z=f(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n+\ldots, |y|<R \qquad (1)$$

и

$$y=\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots, |x|<r, \qquad (2)$$

то условие

$$|b_0|<R \qquad (3)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы в некотором интервале $(-\sigma, \sigma)$ *имело место разложение*

$$f(\varphi(x))=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots, \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\ldots+a_nb_0^n+\ldots \\ c_1 &= a_1b_1+2a_2b_1b_0+\ldots+na_nb_0^{n-1}b_1+\ldots \qquad (5) \\ c_2 &= a_1b_2+a_2(b_1^2+2b_0b_2)+\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Легко проверить, что ряд (4) при значениях (5) его коэффициентов получается в результате подстановки ряда (2) в ряд (1).

Для доказательства теоремы рассмотрим двойной ряд

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots + a_n b_0^n + \ldots, \\ &+ a_1 b_1 x + 2a_2 b_1 b_0 x + \ldots + n a_n b_0^{n-1} b_1 x + \ldots \\ &+ a_1 b_2 x^2 + a_2 (b_1^2 + 2b_0 b_2) x^2 + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

и докажем, что условие (3) является необходимым и достаточным для абсолютной сходимости этого ряда, а затем проверим, что, суммируя ряд (6) по столбцам и строкам, соответственно, получим левую и правую часть равенства (4).

Необходимость условия (3) вытекает сразу из сравнения первой строки ряда (6) с рядом (1). Для доказательства достаточности мы воспользуемся определениями и утверждениями § 2.

Если $b_0 \neq 0$, то на основании теоремы 2 § 2 на некотором интервале $(-\rho, \rho)$, $\rho < r$, будет

$$\varphi(x) \ll \frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}}, \tag{7}$$

где m — любое положительное число большее $|b_0|$. Так как $|x| < \rho$, то можно считать $m < R$. Мы можем положить

$$f(y) \ll \frac{M}{1 - \frac{y}{R_1}} = M + M\frac{y}{R_1} + M\frac{y^2}{R_1^2} + \ldots \tag{8}$$

Взяв

$$m < R_1 < R$$

и подставив в ряд (8)

$$y = \frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}} = m + m\frac{x}{\rho} + m\frac{x^2}{\rho^2} + \ldots,$$

$$y^2 = \frac{m^2}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2} = m^2 + 2m^2\frac{x}{\rho} + 3m^2\frac{x^2}{\rho^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

мы получим двойной ряд

$$\begin{aligned} &M + M\left(\frac{m}{R_1}\right) + \ldots + M\left(\frac{m}{R_1}\right)^n + \ldots \\ &+ M\left(\frac{m}{R_1}\right)\frac{x}{\rho} + \ldots + n M\left(\frac{m}{R_1}\right)^n \frac{x}{\rho} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{9}$$

коэффициенты которого положительны и больше модулей соответствующих коэффициентов ряда (6), как это следует из (7), (8) и теоремы 2 § 2. Таким образом, ряд (6) будет заведомо абсолютно сходящимся, если таковым является ряд (9).

Положим

$$|x| < \rho\left(1 - \frac{m}{R_1}\right). \tag{10}$$

Тогда будет

$$|x| < \rho;\ m < R_1\left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right),$$

откуда следует, что каждый из столбцов ряда (9) при замене x на $|x|$ образует сходящийся ряд, причем суммой членов $(n+1)$-го из этих рядов будет

$$M\left[\frac{m}{R_1\left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n,$$

а это означает, что ряд (9) абсолютно сходится. Таким образом, при значениях x, удовлетворяющих условию (10), ряд (6) абсолютно сходится.

Проверка того, что суммирование (6) по столбцам и строкам действительно приводит к равенству (4), не представляет затруднений. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $b_0 = 0$, то в доказательстве теоремы надо только заменить (7) на

$$\varphi(x) \ll \frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}} \cdot \frac{x}{\rho}$$

и положить

$$|x| < \rho \frac{R_1}{R_1 + m},$$

где R_1 можно взять сколь угодно близким к R, а m — произвольное положительное число.

Замечание 2. Можно показать, что при $R = \infty$ разложение (4) справедливо на интервале $(-r, r)$.

Пример 1. Разложить $\sin \ln(1+x)$ в ряд по степеням x.

Решение: $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots, -\infty < y < \infty,$

$$y = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, -1 < x \leq 1,$$

$$\sin\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\ldots -1<x<1.$$

Пример 2 (Коши). Заметив, что

$$(1+x)^k=e^{k\ln(1+x)},\ k\text{ — любое,}$$

найдем

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}+\ldots,-\infty<y<\infty,$$

$$y=k\ln(1+x)=k(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots),-1<x\leq 1,$$

$$(1+x)^k=P_0(k)+P_1(k)x+P_2(k)x^2+\ldots+P_n(k)x^n+\ldots,\quad (11)$$

где, легко видеть, $P_n(k)$ — многочлен n-й степени от k, обращающийся в нуль при $k=0,1,\ldots,\ n-1$ и равный единице при $k=n$. Следовательно,

$$P_n(k)=\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}$$

и ряд (11) является известным биномальным рядом.

2°. Деление рядов. Доказанная в предыдущем пункте теорема вместе с теоремой умножения позволяет полностью рассмотреть вопрос о делении рядов.

Теорема 4. *Пусть*

$$F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

и

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,\ |x|<R_1,$$

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots,\quad b_0\neq 0,\ |x|<R_2.$$

Тогда функция $F(x)$ разлагается в степенной ряд, заведомо сходящийся на некотором интервале.

Действительно, так как

$$F(x)=f(x)\frac{1}{\varphi(x)},$$

то на основании теоремы умножения нам достаточно показать, что функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ разлагается на некотором интервале в степенной ряд. Предполагая $b_0=1$ (что не уменьшает, ввиду возможности замены $f(x)$ на $\frac{1}{b_0}f(x)$ общность рассуждений), имеем

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-\ldots,-1<y<1$$

$$y=b_1x+b_2x^2+\ldots,$$

и остается сослаться на теорему предыдущего пункта.

Теорема 5. *Если, при обозначениях предыдущей теоремы,* $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-1} = 0$, $b_k \neq 0$, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, *то имеет место разложение вида*

$$F(x) = x^{m-k}(c_0 + c_1 x + \ldots),$$

которое, конечно, не имеет смысла при $x = 0$, если $m-k<0$.

Теорема является очевидным следствием предыдущей. На практике поступают следующим образом. Полагая, если $b_0 \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

можем, на основании того, что по теореме 4 ряд справа сходится, написать:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.),$$

и на основании теоремы о единственности разложения в степенной ряд найдем

$$\begin{gathered} b_0 A_0 = a_0, \\ b_0 A_1 + b_1 A_0 = a_1, \\ b_0 A_2 + b_1 A_1 + b_2 A_0 = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

— систему уравнений, из которой последовательно находим коэффициенты A_0, A_1, A_2,...

Пример 3. Разложить tg$x$ в ряд по степеням x.

Решение: $$\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

Ввиду нечетности tg$x$ можно сразу сказать, что $A_0 = A_2 = \ldots = 0$. Далее,

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)(A_1 x + A_3 x^3 + \ldots) =$$
$$= A_1 x + \left(A_3 - \frac{A_1}{2!}\right)x^3 + \left(A_5 - \frac{A_3}{2!} + \frac{A_1}{4!}\right)x^5 + \ldots,$$

откуда

$$\begin{gathered} A_1 = 1, \\ A_3 - \frac{A_1}{2!} = -\frac{1}{3!}, \\ A_5 - \frac{A_3}{2!} + \frac{A_1}{4!} = \frac{1}{5!}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Следовательно,

$$A_1=1,\ A_3=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3},\ A_5=\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=\frac{2}{15},\dots$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+..$$

Что касается сходимости полученного ряда, то доказанные нами теоремы позволяют только утверждать, что ряд сходится в некоторой окрестности нуля. Следовательно, на основании одних только этих теорем с уверенностью пользоваться найденным разложением можно лишь при достаточно малых значениях x.

3°. Возведение рядов в степень. Предыдущие теоремы позволяют, также как и в п. 2°, воспользоваться методом неопределенных коэффициентов для разложения в ряд функции

$$F(x)=f^\lambda(x),$$

если известно разложение в ряд функции $f(x)$.

Пусть

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k+1}+a_2x^{k+2}+\dots,\ k\geqslant 0,\ a_0\neq 0.$$

Тогда

$$F(x)=f^\lambda(x)=a_0^\lambda x^{k\lambda}(1+y)^\lambda=a_0^\lambda x^{k\lambda}\left\{1+\lambda y+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}y^2+\dots\right\},$$

$$y=\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\dots$$

Значит, на основании теоремы п. 1°, в некоторой окрестности нуля справедливо разложение

$$F(x)=a_0^\lambda x^{k\lambda}\{1+A_1x+A_2x^2+\dots\},$$

которое при $x=0$, $\lambda<0$ теряет смысл.

Практически коэффициенты A_1, $A_2,\dots$ вычисляются так, как будет показано на примере.

Пример 4. Разложить $\sin^{17}x$ в ряд по степеням x.

Решение:

$$\sin^{17}x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)^{17}=x^{17}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\dots\right)^{17}=$$

$$=x^{17}\{1+A_2x^2+A_4x^4+\dots\}$$

($A_{2k-1}=0$ ввиду нечетности $\sin^{17}x$ и x^{17}). Следовательно,

$$\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)^{17}=1+A_2x^2+A_4x^4+\dots \qquad (1)$$

Дифференцируя, найдем

$$17\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right)^{16}\left(-\frac{2x}{3!}+\frac{4x^3}{5!}-\ldots\right)=$$
$$=2A_2x+4A_4x^3+\ldots \qquad (2)$$

Умножив (2) на $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots$ и воспользовавшись (1), найдем

$$17(1+A_2x^2+A_4x^4+\ldots)\left(-\frac{2x}{3!}+\frac{4x^3}{5!}-\ldots\right)=$$
$$=(2A_2x+4A_4x^2+\ldots)\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right).$$

Выполнив умножение и сравнив коэффициенты полученных рядов, найдем

$$-\frac{17}{3}=2A_2,$$

$$17\left(\frac{4}{5!}-\frac{2A_2}{3!}\right)=4A_4-\frac{2A_2}{3!},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

то есть

$$A_2=-\frac{17}{6},\quad A_4=\frac{17\cdot 83}{90},\ldots,$$

$$\sin^{17}x=x^{17}\left\{1-\frac{17}{16}x^2+\ldots\right\}.$$

Замечание. Теорема п. 1° позволяет утверждать только то, что полученный нами ряд сходится в некоторой окрестности нуля. Между тем, легко показать, что фактически ряд (2) сходится при $-\infty<x<\infty$, а заодно показать, что можно легко найти любой из коэффициентов этого ряда.

На основании формулы Эйлера

$$\sin^{17}x=\frac{(e^{ix}-e^{-ix})^{17}}{2^{16}\cdot 2i}=\frac{1}{2^{16}}\frac{(e^{i17x}-e^{-i17x})+17(e^{i15x}-e^{-i15x})+\ldots}{2i}=$$
$$=\frac{1}{2^{16}}(\sin 17x+17\sin 15x+\ldots).$$

Так как $\sin 17x$, $\sin 15x,\ldots$ разлагаются в степенные ряды, сходящиеся при $-\infty < x < \infty$, то и $\sin^{17} x$ разлагается в степенной ряд, сходящийся всюду и имеющий при x^{2k+1} коэффициент

$$(-1)^k \frac{1}{2^{16}}\left\{\frac{17^{2k+1}+17\cdot 15^{2k+1}+\dots}{(2k+1)!}\right\}.$$

4°. Применение теории дифференциальных уравнений. В основании такого применения лежат две теоремы, которые мы докажем, и теорема о единственности решения дифференциального уравнения, которую мы предполагаем известной.

Теорема 6. *Пусть имеем дифференциальное уравнение*

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

и удовлетворяются условия

а) $p(x)$ и $q(x)$ допускают разложения в степенные ряды

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots, \quad |x| < R_1, \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots, \quad |x| < R_2. \end{aligned} \tag{2}$$

б) Пусть ρ — один из корней уравнения

$$f(r) = r(r-1) + a_0r + b_0 = 0, \tag{3}$$

*если разность этих корней не равна целому числу или больший из них в противном случае. Тогда существует ряд**

$$z = x^\rho (A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n + \dots), \tag{4}$$

который при подстановке (подстановка формальна до тех пор, пока не установлена сходимость ряда (4) *в уравнение* (1) *вместо y обращает уравнение в тождество.*

Доказательство. Подставив в уравнение (1) вместо $p(x)$, $q(x)$ их разложения (2) и вместо y, y', y'', соответственно, ряды

$$z = A_0x^\rho + A_1x^{\rho+1} + A_2x^{\rho+2} + \dots + A_nx^{\rho+n} + \dots,$$

$$z' = A_0\rho x^{\rho-1} + A_1(\rho+1)x^\rho + \dots + A_n(\rho+n)x^{\rho+n-1} + \dots,$$

$$z'' = A_0\rho(\rho-1)x^{\rho-2} + A_1(\rho+1)\rho x^{\rho-1} + \dots + \\ + A_n(\rho+n)(\rho+n-1)x^{\rho+n-2} + \dots,$$

получим равенство

$$x \ A_0[b_0 + a_0\rho + \rho(\rho-1)] + \\ + x^{\rho+1}\{A_1[b_0 + a_0(\rho+1) + (\rho+1)\rho] + A_0[b_1 + a_1\rho]\} + \\ + x^{\rho+2}\{A_2[b_0 + a_0(\rho+2) + (\rho+2)(\rho+1)] + A_1[b_1 + a_1(\rho+1)] +$$

---

* Ряд (4) будет не обычным степенным рядом, если ρ — нецелое.

$$+A_0[b_2+a_2\rho]\}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+x^{\rho+n}\{A_n[b_0+a_0(\rho+n)+(\rho+n)(\rho+n-1)]+\ldots\}+\ldots=0,$$

которое можно переписать так:

$$\begin{gathered}x^\rho A_0 f(\rho)+x^{\rho+1}[A_1 f(\rho+1)+A_0\varphi_{11}(\rho;\ a_1,\ b_1)]+\\ +x^{\rho+2}[A_2 f(\rho+2)+A_1\varphi_{21}(\rho;\ a_1,\ b_1)+A_0\varphi_{22}(\rho;\ a_2,\ b_2)]+\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +x^{\rho+n}[A_n f(\rho+n)+A_{n-1}\varphi_{n1}(\rho;\ a_1,\ b_1,\ \ldots)+\\ +\ldots A_0\varphi_{nn}(\rho;\ a_1,\ldots)]+\ldots=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Это равенство обратится в тождество, если положим

$$\begin{aligned}&A_0 f(\rho)=0,\\ &A_1 f(\rho+1)+A_0\varphi_{11}(\rho;\ a_1,\ b_1)=0,\\ &A_2 f(\rho+2)+A_1\varphi_{21}+A_0\varphi_{22}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_n f(\rho+n)+A_{n-1}\varphi_{n1}+\ldots+A_0\varphi_{nn}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\tag{6}$$

Первое из равенств (6) справедливо при любом значении A_0, так как ρ является, по предположению, корнем уравнения (3). Из остальных равенств (6) последовательно можно определить, и притом однозначно, коэффициенты A_1, A_2, ... Действительно, так как ρ является большим из корней уравнения (3), то величины $f(\rho+1)$, $f(\rho+2)$, ... $f(\rho+n)$, ... отличны от нуля. Теорема доказана.

Замечание 1. Лишь для упрощения записей и вычислений мы ограничились рассмотрением уравнения (1). Теорема тривиально обобщается на случай уравнения

$$x^n y^{(n)}+x^{n-1}p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+xp_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0.\tag{1$_1$}$$

Замечание 2. Для доказательства следующей теоремы важно подчеркнуть, что в равенстве (6) функции φ_{km} являются линейными однородными, с положительными коэффициентами, функциями величин a_r, b_s.

Теорема 7. *Ряд* (4) *сходится при* $|x|<R=\min(R_1, R_2)$.

Доказательству теоремы предпошлем следующее:

Замечание. Без уменьшения общности рассуждений можно считать $\rho=0$, то есть (в силу (3)) $b_0=0$. Действительно, если положить

$$y=x^\rho u,$$

то уравнение (1) заменится уравнением того же вида

$$x^2u''+x[2\rho+p(x)]u'+[\rho(\rho-1)+\rho p(x)+q(x)]u=0\tag{7}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям а), б) теоремы 1 (только R_2 заменяется на $\min(R_1, R_2)$) и если ряд (4) формально удовлетворяет уравнению (1), то ряд

$$u = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

формально удовлетворяет уравнению (7).

Переходя к доказательству теоремы, перепишем (положив $b_0 = 0$ и изменив обозначения a_i на $-a_i$, $i > 0$, b_j на $-b_j$) уравнение (1) в виде

$$xy'' + a_0 y' = xy'(a_1 + a_2 x + \ldots) + y(b_1 + b_2 x + \ldots). \quad (8)$$

Этому уравнению формально будет удовлетворять ряд

$$y = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad (9)$$

с коэффициентами, согласно (6), определяемыми рекуррентными формулами

$$nc_n(n - 1 + a_0) = P_n(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_{n-1}), \quad (10)$$

где P_n — линейные однородные функции, с положительными коэффициентами, всех аргументов.

Мы найдем теперь, при $|x| < R$, сходящийся ряд, мажорантный для ряда (9). Тем самым будет доказана сходимость ряда (9) при $|x| < R$.

Рассмотрим уравнение

$$\mu(xY'' + 2Y') = xY'(A_1 + A_2 x + \ldots) + Y(B_1 + B_2 x + \ldots), \quad (11)$$

в котором

$$A_1 + A_2 x + \ldots = B_1 + B_2 x + \ldots = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}, \quad r < R$$

являются мажорантами рядов

$$a_1 + a_2 x + \ldots, \quad b_1 + b_2 x + \ldots, \quad (12)$$

μ — любое положительное число, удовлетворяющее условию* $|n - 1 + a_0| > \mu(n + 1)$. Уравнению (1), очевидно, будет удовлетворять ряд

$$Y = 1 + C_1 x + \ldots + C_n x^n + \ldots, \quad (13)$$

коэффициенты которого связаны зависимостями

$$n\mu C_n(n+1) = P_n(A_1, \ldots, A_n; B_1, \ldots, B_n; C_1, \ldots, C_{n-1}). \quad (14)$$

Отсюда следует, что ряд (13) является мажорантным для ряда (9) и нам остается только показать, что ряд (13) сходится при $|x| < r$. Для этого перепишем уравнение (11) в виде

---

* Такой выбор μ возможен, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n - 1 + a_0}{n + 1} > 0 (= 1)$.

$$\frac{xY''+2Y'}{xY'+Y}=\frac{M}{\mu}\frac{1}{1-\frac{x}{r}}\,. \qquad (15)$$

Последовательно интегрируя, найдем

$$xY'+Y=C\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\frac{Mr}{\mu}},$$

$$xY=C\int\limits_0^x\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{Mr}{\mu}}dx+C'.$$

Взяв $C'=0$, $C=1$, найдем частное решение уравнения (15),

$$Y_1=\frac{1}{x}\int\limits_0^x\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{Mr}{\mu}}dx=$$

$$=\frac{1}{x}\int\limits_0^x\left\{1+\frac{M}{\mu}x+\frac{\frac{Mr}{\mu}\left(\frac{Mr}{\mu}+1\right)}{2!\,r^2}x^2+\dots\right\}dx=$$

$$=1+\frac{M}{2\mu}x+\frac{\frac{Mr}{\mu}\left(\frac{Mr}{\mu}+1\right)}{3!\,r^2}x^2+\dots,\ |x|<r.$$

Последний ряд (сходящийся!) совпадает с рядом (13), так как оба ряда удовлетворяют уравнению (11) и значит их коэффициенты удовлетворяют зависимости (14), а этими зависимостями коэффициенты определяются однозначно. Теорема доказана.

Из доказанных теорем и теоремы о единственности решения дифференциального уравнения следует.

Теорема 8. *Если функция* $\varphi(x)$ *и степенной ряд*

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\dots+A_nx^n+\dots \qquad (16)$$

удовлетворяют уравнению (1_1), *коэффициенты которого* $p_1(x),\dots, p_n(x)$ *разлагаются в степенные ряды, соответственно, при* $|x|<R_1,\dots,|x|<R_n$ *и если, кроме того,*

$$A_0=\varphi(0),\ A_1=\varphi'(0),\ A_2=\frac{\varphi''(0)}{2!},\ \dots,\ A_{n-1}=\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!},$$

то ряд (16) *сходится при* $|x|<R=\min(R_1, R_2,\dots,R_n)$ *и его суммой является* $\varphi(x)$. Эта теорема и применяется к разложению функций в степенные ряды. Приведем ряд примеров.

Пример 1. Разложить $y = e^x$ в ряд по степеням x.

Решение. Данная функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$y' - y = 0, \tag{17}$$

или, что то же, уравнению

$$xy' - xy = 0,$$

имеющему вид (1_1) $(n = 1,\ p_1(x) = -x)$.

Полагаем

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$
$$y' = A_1 + 2A_2 x + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots$$

и подставляем эти ряды в (17). Мы получим

$$\begin{gathered} A_1 - A_0 = 0 \\ 2A_2 - A_1 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ nA_n - A_{n-1} = 0. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered}$$

Отсюда

$$A_1 = A_0,\ A_2 = \frac{A_0}{2!},\ A_3 = \frac{A_0}{3!},\ \ldots,\ A_n = \frac{A_0}{n!},\ \ldots$$

Таким образом, ряд

$$A_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$

удовлетворяет уравнению (16) и сходится при $-\infty < x < \infty$. Чтобы этот ряд имел своей суммой e^x достаточно положить $A_0 = e^x|_{x=0} = 1$, ибо тогда сумма ряда S и функция e^x станут решениями одного и того же уравнения первого порядка, удовлетворяющими одному и тому же начальному условию $y|_{x=0} = 1$, и по теореме о единственности решения дифференциального уравнения должно быть $S = e^x$.

Пример 2. Разложить $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ в ряд по степеням x.

Решение.

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\quad y|_{x=0} = 0$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\qquad y'|_{x=0} = 1$$

$$y'' = -\frac{x}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}.$$

Следовательно,

$$y'' + \frac{x}{1 + x^2} y' = 0$$

или, что то же,

$$x^2 y'' + x(x^2 - x^4 + x^6 - \dots) y' = 0. \qquad (18)$$

Уравнение (18) имеет вид (1).

Подставив в уравнение (18)

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots,$$

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + nA_n x^{n-1} + \dots,$$

$$y'' = 2A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3 x + \dots + n(n-1) A_n x^{n-2} + \dots,$$

найдем

$$A_2 = 0$$

$$3\cdot 2\cdot A_3 + A_1 = 0$$

$$4\cdot 3A_4 + 2A_2 = 0$$

$$5\cdot 4\cdot A_5 + 3A_3 - A_1 = 0$$

$$6\cdot 5A_6 + 4A_4 - 2A_2 = 0$$

. . . .

$$n(n-1) A_n + (n-2) A_{n-2} - (n-4) A_{n-4} + \dots = 0$$

. . . .

Следовательно,

$$A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0$$

$$A_3 = -\frac{A_1}{3\cdot 2}, \quad A_5 = \frac{3^2 A_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \quad A_7 = -\frac{5\cdot 3^2 + 5\cdot 4\cdot 3 + 5!}{7!} A_1, \dots$$

Значит, ряд

$$A_0 + A_1 \left\{ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{3^2}{5!} x^5 - \dots \right\}$$

сходится при $|x| < 1$ и удовлетворяет уравнению (18). Сумма этого ряда (снова на основании теоремы единственности из теории дифференциальных уравнений) совпадает с функцией $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, если мы положим $A_0 = 0$, $A_1 = 1$. Окончательно

$$\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{3^2}{5!} x^5 - \dots$$

Тот же результат получается, если исходить из равенства

$$\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} =$$

$$= \int_0^x \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3} t^4 - \dots \right\} dt.$$

Пример 3. Разложить $y=\cos(\lambda \arcsin x)$ в ряд по степеням x.

Решение. Так как

$$y=\cos(\lambda \arcsin x), \qquad y|_{x=0}=1,$$

$$y'=-\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\lambda \arcsin x), \qquad y'|_{x=0}=0,$$

$$y''=-\frac{\lambda^2}{1-x^2}\cos(\lambda \arcsin x)-$$

$$-\frac{\lambda x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\sin(\lambda \arcsin x),$$

то

$$y''-\frac{x}{1-x^2}y'+\frac{\lambda^2}{1-x^2}y=0,$$

или, что то же,

$$x^2y''-x(x^2+x^4+\ldots)y'+\lambda^2(x^2+x^4+\ldots)y=0, \quad |x|<1.$$

Положив

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$

и выполнив вычисления, по существу такие же, как в предыдущем примере, найдем

$$\cos(\lambda \arcsin x)=1-\lambda^2\frac{x^2}{2!}+\lambda^2(\lambda^2-4)\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

§ 4. Разложение в ряд неявной функции (метод Ньютона)

1. Если y как функция от x определен уравнением

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

и функция $F(x, y)$ имеет при $x=a$, $y=b$ $F(a, b)=0)$ частные производные всех порядков, причем $F_y(a, b)\neq 0$, то можно, при $x=a$, вычислить производные всех порядков от y по формулам

$$y'=-\frac{F_x}{F_y},$$

$$y''=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}, \tag{2}$$

. . . .

и составить ряд Тейлора

$$b+(x-a)y'_a+\frac{1}{2!}(x-a)^2\cdot y''_a+\ldots \tag{3}$$

Ряд (3), вообще говоря, сходится в некоторой окрестности точки $x=a$ и его суммой является $y(x)$. Если $F_y(a, b)=0$, то или вообще не имеет места разложение (3), или нельзя воспользоваться формулами (2). Однако, могут существовать разложения в ряд*

$$y=A_1x^{\alpha_1}+A_2x^{\alpha_2}+\ldots+A_nx^{\alpha_n}+\cdots, \tag{4}$$

где показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, быть может, не целые числа.

Пример 1. Пусть

$$F(x, y)=(1-x)y^3-xy^2+x^2(1-x)y-x^3=0. \tag{5}$$

Имеем

$$F(0, 0)=0, \quad F_y(0, 0)=0.$$

В то же время

$$F(x, y)=[(1-x)y-x](x^2+y^2)$$

и

$$y=\frac{x}{1-x}=x+x^2+\ldots, \quad |x|<1$$

удовлетворяет уравнению (5).

Пример 2. Пусть

$$F(x, y)=y^4+2x(x-2)y^2+x^4=0. \tag{6}$$

Здесь снова

$$F(0, 0)=0, \quad F_y(0, 0)=0.$$

Легко проверить, что

$$y=\sqrt{x}+x\sqrt{1-x}=x^{\frac{1}{2}}+x-\frac{1}{2}x^2-\ldots$$

является одним из решений уравнения (6).

2. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$a_1x^{m_1}y^{n_1}+a_2x^{m_2}y^{n_2}+\ldots+a_kx^{m_k}y^{n_k}=0, \quad m_i\geqslant 0, \quad n_i\geqslant 0. \tag{7}$$

Предположим, что существует разложение

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots, \quad A\neq 0, \tag{8}$$

$$\alpha<\beta<\gamma<\ldots$$

и станем искать показатели $\alpha, \beta, \ldots$ и коэффициенты $A, B, \ldots$. Записав (8) в виде

$$y=x^{\alpha}(A+Bx^{\beta-\alpha}+\ldots)=x\ z, \tag{9}$$

---

* В дальнейшем будем считать $a=0$, чем не вносим ограничений так как всегда можно выполнить замену $x-a$ на x.

Заметим, прежде всего, что

$$A = \lim_{x \to 0} z.$$

Подставив (9) в (7), получим

$$a_1 z^{n_1} x^{m_1+\alpha n_1} + a_2 z^{n_2} x^{m_2+\alpha n_2} + \ldots + a_k z^{n_k} x^{m_k+\alpha n_k} = 0. \quad (10)$$

Предположим, что наименьшим среди показателей

$$m_1 + \alpha n_1,\ m_2 + \alpha n_2, \ldots,\ m_k + \alpha n_k \quad (11)$$

является, например, первый и что равного ему нет. Тогда из (10) следует:

$$a_1 z^{n_1} + a_2 z^{n_2} x^{\lambda_1} + \ldots + a_k z^{n_k} x^{\lambda_{k-1}} = 0,\ \lambda_i > 0,$$

и при $x \to 0$ получаем

$$a_1 \lim_{x \to 0} z^{n_1} = 0,$$

наконец,

$$A = \lim_{x \to 0} z = 0,$$

что невозможно.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Для возможности разложения* (8) *необходимо, чтобы (по крайней мере) два из показателей* (11) *были равны и не больше остальных.*

Допустим теперь, что*

$$m_1 + \alpha n_1 = m_2 + \alpha n_2 < m_i + \alpha n_i,\ i > 2$$

и, для определенности, что $n_2 > n_1$. Тогда из (10) будет следовать

$$a_1 z^{n_1} + a_2 z^{n_2} + a_3 z^{n_3} x^{\mu_1} + \ldots = 0,\ \mu_i > 0,$$

и при $x \to 0$ получим

$$a_1 A^{n_1} + a_2 A^{n_2} = 0,$$

$$A = \left(-\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{n_2 - n_1}}.$$

Имея α и A, положим

$$y = A x^{\alpha} + u. \quad (12)$$

---

* Если предположить, что среди показателей (11) есть больше чем два равных между собой и меньших остальных, то усложнится только вычисление A.

Подставив (12) в (7), получим для определения

$$u = Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots$$

уравнение того же вида (7), но возможно с нецелыми показателями при x, даже если были целыми m_i.

Пример 3. Пусть

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \qquad (13)$$

Положив

$$y = x^{\alpha} z,$$

получим

$$x^3 + x^{3\alpha} z^3 - 3x^{\alpha+1} z = 0. \qquad (14)$$

Предположение

$$3 = 3\alpha$$

приводит к уравнению

$$x + xz^3 - 3z = 0,$$

из которого следует

$$A = \lim_{x \to 0} z = 0.$$

Следовательно, сделанное предположение надо отвергнуть.

Предположение

$$3 = \alpha + 1, \quad \alpha = 2,$$

приводит к уравнению

$$1 + x^3 z^3 - 3z = 0$$

и к выводу

$$A = \lim_{x \to 0} z = \frac{1}{3}.$$

Подставив

$$y = \frac{1}{3} x^2 + u$$

в уравнение (13), получим уравнение

$$\frac{1}{27} x^6 + \left(\frac{1}{3} x^4 - 3x\right) u + x^2 u^2 + u^3 = 0. \qquad (15)$$

В этом уравнении положим

$$u = x^{\beta} v, \quad \beta > 2$$

и получим уравнение

$$\frac{1}{27} x^6 + \left(\frac{1}{3} x^4 - 3x\right) x^{\beta} v + x^{2\beta} v^2 + x^{3\beta} v^3 = 0.$$

Приравняв попарно показатели при x в левой части последнего уравнения, найдем для β значения 5, 2, 3, 4, 1, 1/2, 0, из которых только первое больше чем 2 и делает два показателя при x в левой части уравнения равными и меньшими всех остальных.

Из уравнения

$$\frac{1}{27}x^6+\left(\frac{1}{3}x^4-3x\right)x^5v+x^{10}v^2+x^{15}v^3=0$$

находим

$$\beta=\lim_{x\to 0}v=\frac{1}{81}.$$

Таким образом,

$$u=\frac{1}{81}x^5+Cx^\gamma+\ldots,$$

$$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{81}x^5+\ldots \tag{16}$$

Вернемся к уравнению (14). Мы можем также предположить

$$3\alpha=\alpha+1,\quad \alpha=\frac{1}{2}$$

и тогда получим

$$x^{\frac{3}{2}}+z^3-3z=0,$$

$$A=\lim_{x\to 0}z=\pm\sqrt{3}.$$

Полагая

$$y=\pm\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}+z,\quad z=x^\beta u,$$

найдем

$$x^3+6x^{\beta+1}u\pm 3\sqrt{3}\,x^{2\beta+\frac{1}{2}}u^2+x^{3\beta}u^3=0$$

и затем

$$\beta=2,\quad B=\lim_{x\to 0}u=-\frac{1}{6}$$

$$y=\pm\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}x^2+Cx^\gamma+\ldots \tag{17}$$

3. Метод проб, примененный нами в рассмотренном примере для нахождения показателей α, β,..., является утомительным, если число показателей (11) не мало. Так, например, если число этих показателей равно 10, то надо проверить возможность каждого из 45 предположений:

$$m_i+\alpha n_i=m_j+\alpha n_j,\quad i\neq j.$$

Ньютон указал правило, которое позволяет находить показатели α, β,... сразу, без проб.

Правило Ньютона. Строим выпуклый многоугольник, вершинами которого являются некоторые из точек $M_i\,(m_i,\ n_i)$, такой, чтобы все точки $(m_i,\ n_i)$ лежали внутри многоугольника или на его периметре. Находим такую сторону многоугольника, которая отсекает на координатных осях положительные отрезки и относительно которой многоугольник и начало координат лежат по разные стороны. Если концами такой стороны многоугольника являются $M_r(m_r, n_r)$, $M_s(m_s, n_s)$, то показатели $m_r+\alpha n_r$, $m_s+\alpha n_s$ равны и не превышают любой из показателей (11).

Действительно, прямая $x+\alpha y=\beta$ отсекает на оси OX отрезок β, и если она проходит через точки M_r, M_s, то

$$m_r+\alpha n_r=m_s+\alpha n_s=\beta.$$

Если точка (m_k, n_k) не лежит на рассматриваемой прямой, то на основании правила вычисления расстояния от точки до прямой (с учетом того, что точка (m_k, n_k) и начало координат находятся по разные стороны от прямой), получим

$$m_k+\alpha n_k>\beta.$$

Пример 4. Для уравнения (13)

$$x^3+y^3-3xy=0$$

вершинами многоугольника Ньютона являются точки A (3,0), B (0,3), C(1,1) (рис. 7) и прямыми, удовлетворяющими правилу, являются прямые AC и BC. Первая из них дает

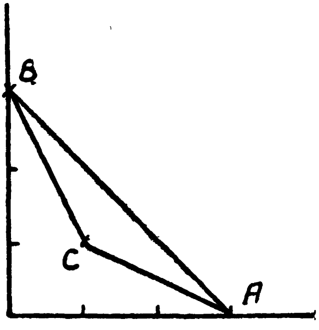

Рис. 7.

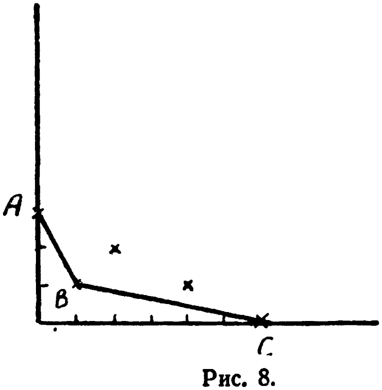

Рис. 8.

$$3+\alpha\cdot 0=1+\alpha\cdot 1, \quad \alpha=2,$$

а вторая

$$1+\alpha\cdot 1=0+3\alpha, \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

Вершинами многоугольника Ньютона для уравнения (15) будут точки (6,0), (4,1), (1,1), (2,2), (0,3) (рис.8) и прямыми, удовлетворяющими правилу, являются прямые AB и BC. Первая из них дает

$$0+3\beta=1+\beta\cdot 1, \quad \beta=\frac{1}{2},$$

а вторая

$$6 + 0\cdot\beta = 1 + \beta,\ \beta = 5.$$

Заметим, наконец, что кривая, определяемая уравнением (13), имеет вид, указанный на рис. 9 (декартов лист), и нет ничего удивительного в том, что вблизи начала координат численные значения ординаты различных ветвей кривой вычисляются по различным формулам (16), (17).

Пример 5 (Ньютон). Будем искать решение уравнения

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{1}{a}x^3y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0,\ a>0 \quad (18)$$

в виде

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots,\ 0 < \alpha < \beta < \ldots$$

Соответствующий многоугольник Ньютона представлен на рис. 10. Сторона AB многоугольника дает

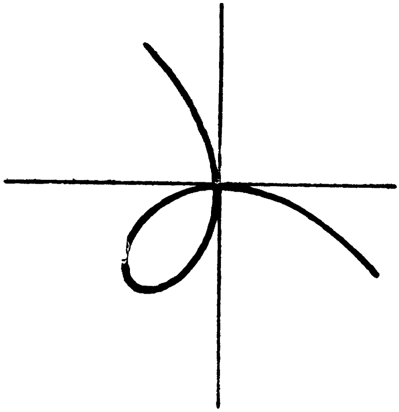

Рис. 9.

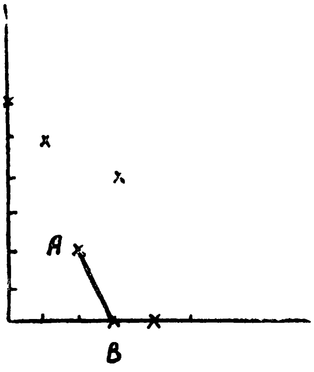

Рис. 10.

$$2 + 2\alpha = 3, \qquad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Полагая

$$y = x^{\frac{1}{2}} z, \quad A = \lim_{x\to 0} z,$$

получим для определения A уравнение

$$A^6 - 7a^2A^2 + 6a^3 = 0,$$

вещественными решениями которого являются

$$\sqrt{a},\ -\sqrt{a}, \sqrt{2a},\ -\sqrt{2a}.$$

Положив

$$y = \sqrt{a}\,x^{\frac{1}{2}} + u,$$

получим уравнение

$$(\sqrt{ax}+u)^6-5x(\sqrt{ax}+u)^5+\frac{1}{a}x^3(\sqrt{ax}+u)^4-$$

$$-7a^2x^2(\sqrt{ax}+u)^2+6a^3x^3+b^2x^4=0,$$

которое нет необходимости упрощать, так как многоугольник Ньютона можно построить непосредственно. Этот многоугольник представлен на рис. 11 и две его вершины (2,5; 1), (3,5; 0) дают $\beta=1$.

Положив

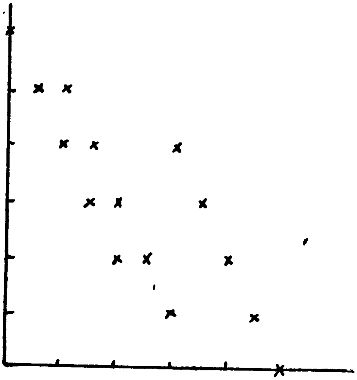

Рис. 11.

$$u=xv,\quad B=\lim_{x\to0} v,$$

найдем

$$(\sqrt{a}+v\sqrt{x})^6-5\sqrt{x}(\sqrt{a}+$$

$$+v\sqrt{x})^5+\frac{1}{a}x^2(\sqrt{a}+v\sqrt{x})^4-$$

$$-7a^2(\sqrt{a}+v\sqrt{x})^2+6a^3+$$
$$+b^2x^4=0;$$

$$\{6v\sqrt{a}-5\sqrt{a}-14a^2\sqrt{a}v\}\sqrt{x}+$$

$$+xS+\ldots=0;$$

$$6B-5+14a^2B=0,$$

$$B=\frac{5}{6+14a^2}.$$

Итак,

$$y=\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{6+14a^2}x+\ldots$$

Конечно, это разложение справедливо лишь для одной из вещественных ветвей (их всего четыре) кривой (18).

4. Иногда необходимо найти разложение y не по возрастающим, а по убывающим степеням x. В этом случае, пользуясь правилом Ньютона, надо только исходить из такой стороны многоугольника, что все его точки и начало координат находятся по одну сторону от нее и пользоваться предельным переходом $x\to\pm\infty$ вместо перехода $x\to0$.

Пример 6. $x^3+y^3-3xy=0$.

Воспользовавшись прямой AB (рис. 7) найдем $\alpha=1$.

Положив

$$y=xz;\quad A=\lim_{x\to\pm\infty} z,$$

получим

$$x^3(1+z^3)-3x^2z=0,$$

$$1+z^3-\frac{3z}{x}=0,$$

$$1+A^3=0, \quad A=-1.$$

Теперь полагаем

$$y=-x+u$$

и получаем уравнение

$$3x^2u-3xu^2+u^3+3x^2-3xu=0, \qquad (19)$$

для которого многоугольник Ньютона дает

$$2=2+\alpha, \quad \alpha=0.$$

Следовательно,

$$u=B+Cx^\gamma+\ldots, \ \gamma<0$$

$$3x^2(B+Cx^\gamma+\ldots)-3x(B+Cx^\gamma+\ldots)^2+(B+Cx^\gamma+\ldots)^3-$$
$$-3x^2-3x(B+Cx^\gamma+\ldots)=0.$$

Отсюда, разделив на x^2 и полагая $x\to\pm\infty$, найдем

$$B=-1.$$

Итак,

$$y=-x-1+Cx^\gamma+\ldots, \ \gamma<0. \qquad (20)$$

5. При всей простоте метода Ньютона нахождение большого числа членов разложения (4) представляется утомительным. Дело в том, однако, что в применениях редко требуется знание более двух членов разложения (4). Так, например, разложение (4) может понадобиться для исследования характера особой точки кривой (тогда пользуются разложением по возрастающим степеням x) и для нахождения асимптот (тогда необходимо разложение по убывающим степеням x). В первом случае достаточно знать только показатель α, во втором случае — не более чем первых два члена разложения.

Пример 7. Для декартова листа мы нашли разложения

$$y=\pm\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

$$y=\frac{1}{3}x^2+\ldots,$$

$$y=-x-1+Cx^\gamma+\ldots, \ \gamma<0.$$

Из первого разложения сразу следует, что соответствующая ветвь кривой касается оси OY, лежит справа от этой оси и, вблизи $x=0$, симметрична относительно OX.

Из второго разложения видно, что соответствующая ветвь кривой касается OX, лежит выше этой оси и, вблизи $x=0$, симметрична относительно OY.

Таким образом, точка (0, 0) является двойной точкой кривой.

Из третьего разложения следует, что асимптотой кривой является прямая $y = -x - 1$.

§ 5. Некоторые относящиеся к методу Ньютона теоремы

В предыдущем параграфе мы не рассмотрели вопроса о существовании и сходимости разложения

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots,\ \alpha < \beta < \ldots \tag{1}$$

для $y(x)$, определяемого уравнением

$$F(x,\ y) = 0, \tag{2}$$

когда

$$F_y(0,\ 0) = 0,$$

а также и другие естественно возникающие вопросы.

Теперь, следуя Н. Г. Чеботареву *, мы отметим некоторые относящиеся к указанным вопросам теоремы.

Теорема 1. *Уравнению*

$$F(x,\ y) = (a_n x^{\rho_n} + a_{n+1} x^{\rho n+1} + \ldots) y^n + (b_{n-1} x^{\rho n-1} +$$
$$+ b_n x^{\rho_{n-1}+1} + \ldots) y^{n-1} + \ldots + (k_1 x^{\rho_1} + k_2 x^{\rho_1+1} + \ldots) y +$$
$$+ (l_0 x^{\rho_0} + l_1 x^{\rho_0+1} + \ldots) = 0,\ l_0 \neq 0 \tag{3}$$

всегда можно формально удовлетворить, положив

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots,\ \alpha < \beta < \ldots \tag{4}$$

при надлежащем выборе показателей α, β,... *и коэффициентов* A, B,... (среди которых могут быть и невещественные).

Доказательство. Мы будем пользоваться методом Ньютона для определения показателей α, β,..., каждый раз определенным образом выбирая из возможных значений α, β,... одно. Заметим прежде всего, что для определения показателя α достаточно построить многоугольник Ньютона для точек (ρ_n, n), $(\rho_{n-1}, n-1)$, ... $(\rho_0, 0)$, так как $\rho_k + \alpha k \leqslant (\rho_k + m) + \alpha k$.

Начав построение многоугольника с точки ** $(\rho_0, 0)$, мы получим для первой стороны многоугольника уравнение вида

---

* Н. Г. Чеботарев. „Многоугольник Ньютона" и его роль в современном развитии математики. Сб. „Исаак Ньютон", АН СССР, 1943. Ст. Н. Г. Чеботарева помещена также в третьем томе собрания его сочинений.

** $\rho_0 \neq 0$, так как в противном случае было бы

$$F(0, 0) = l_0 \neq 0.$$

$$x + y\frac{\rho_0 - \rho_k}{k} = \rho_0, \tag{5}$$

и так как прямая (5) отсекает на оси OY отрезок

$$\sigma = \rho_0 : \frac{\rho_0 - \rho_k}{k},$$

то, из прямых (5), отделяет точки многоугольника Ньютона от начала координат та прямая, для которой

$$\sigma = \min.$$

Следовательно,

$$\alpha = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\rho_0 - \rho_k}{k}. \tag{6}$$

Подставив в (3)

$$y = Ax^\alpha + z,$$

получим

$$F(x, Ax^\alpha + z) = A_0(x) + A_1(x)z + \ldots + A_{n-1}(x)z^{n-1} + A_n(x)z^n = 0, \tag{7}$$

где

$$A_0(x) = F(x, Ax^\alpha) = \varphi(A)x^s + \varphi_1(A)x^{s_1} + \ldots \tag{8}$$

$$A_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F(x, Ax^\alpha)}{\partial y^k} = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F(x, Ax^\alpha)}{\partial A^k}x^{-k\alpha}. \tag{9}$$

Коэффициент A должен быть корнем уравнения *

$$\varphi(A) = 0, \tag{10}$$

пусть он будет l-кратным корнем этого уравнения. Таким образом,

$$\varphi(A) = \varphi'(A) = \ldots = \varphi^{(l-1)}(A) = 0,$$

$$\varphi^{(l)}(A) \neq 0. \tag{11}$$

Пусть $r_0, r_1, \ldots, r_n$ — порядки, с которыми обращаются в нуль при $x = 0$ функции $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$. Из (10) следует

$$r_0 \geqslant s_1 > s. \tag{12}$$

Но из (8) имеем

$$\frac{\partial^l F(x, Ax^\alpha)}{\partial A^l} = \varphi^{(l)}(A)x^s + \varphi_1^{(l)}(A)x^{s_1} + \ldots$$

и поэтому, в силу (11), порядок обращения в нуль, при $x = 0$, величины $A_l(x)$ равен $s - l\alpha$, то есть

$$r_l = s - l\alpha. \tag{13}$$

---

* Из выражения (3) для $F(x, y)$ следует, что $A_0(x)$ является многочленом относительно A. В частности, многочленом является $\varphi(A)$.

Теперь из (12) и (13) следует:

$$\frac{r_0 - r_l}{l} \geqslant \frac{s_1 - s + l\alpha}{l} = \alpha + \frac{s_1 - s}{l} > \alpha.$$

Но, подобно тому как мы получили (6),

$$\beta = \max_{1 \leqslant l \leqslant n} \frac{r_0 - r_l}{l}$$

и, следовательно,

$$\beta > \alpha.$$

Таким образом, можно определить A, B,...; α, β,... и притом $\alpha < \beta < \ldots$

Теорема 2. *В разложении* (4) *показатели* α, β,... *имеют конечный общий знаменатель.*

Доказательство этой теоремы (оно вполне элементарно) мы приводить не будем. Отметим только вытекающее из теоремы следствие:

существует такой целый показатель μ, что замена $x = t^{\mu}$ позволяет заменить разложение (4) разложением.

$$y = At^{\alpha} + Bt^{\beta} + \ldots$$

по целым степеням t.

Теорема 3. *Получаемые методом Ньютона разложения* (4) *сходятся в достаточно малой окрестности точки* $x = 0$.

Доказательство этой теоремы не сложно, но требует знания некоторых фактов теории аналитических функций (теории функций комплексного переменного), поэтому мы его не приводим.

Теоремы 2, 3 доказаны в упомянутой статье Н. Г. Чеботарева.

§ 6. Пример Н. Н. Лузина *

Н. Н. Лузин впервые дал положительный ответ на вопрос: существует ли степенной ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

---

* Н. Н. Лузин использовал рассматриваемый пример для того, чтобы дать положительный ответ на вопрос, поставленный Фату: „Существует ли тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящийся на множестве точек, не допускающем покрытия системой интервалов с общей длиной, меньшей любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ (множество точек положительной меры).

с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходящийся в круге единичного радиуса и расходящийся во всех точках окружности этого круга.

Рассмотрим многочлен

$$\theta_p(z) = 1 + z + \cdots + z^p, \quad |z| \leqslant 1.$$

Положив $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, найдем

$$|\theta_p(e^{i\varphi})| = |1 + e^{i\varphi} + \cdots + e^{ip\varphi}| = \left|\frac{e^{i(p+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{i\frac{p+1}{2}\varphi} - e^{-i\frac{p+1}{2}\varphi}}{2i} : \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{2i}\right| \left|\frac{e^{i\frac{p+1}{2}\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(p+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|. \tag{1}$$

Так как

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то при

$$-\frac{\pi}{p+1} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{p+1}$$

будем иметь

$$\left|\frac{\sin(p+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| = (p+1)\left|\frac{\sin(p+1)\frac{\varphi}{2}}{(p+1)\frac{\varphi}{2}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}(p+1). \tag{2}$$

Разделим окружность $|z| = 1$ на $p+1$ равных дуг так, чтобы серединами этих дуг были точки

$$z = 1, \quad e^{i\frac{2\pi}{p+1}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{p+1}}, \ldots, \quad e^{i\frac{2\pi}{p+1}p}.$$

Из (1) и (2) следует, что на дуге

$$\frac{\pi}{p+1}(2k-1) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{p+1}(2k+1),$$

серединой которой является точка $\varphi = \frac{2\pi}{p+1}k$, будет

$$\left|\theta_p\left(ze^{-i\frac{2\pi}{p+1}k}\right)\right| \geqslant \frac{2}{\pi}(p+1), \quad z = e^{i\varphi}. \tag{3}$$

Рассмотрим многочлен

$$H_p(z)=\theta_p(z)+z^{p+1}\theta_p\left(ze^{-i\frac{2\pi}{p+1}}\right)+z^{2(p+1)}\theta_p\left(ze^{-i\frac{2\pi}{p+1}2}\right)+$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+z^{p(p+1)}\theta_p\left(ze^{-i\frac{2\pi}{p+1}p}\right).$$

Это многочлен степени $p(p+2)$, обладающий такими свойствами: 1) модуль любого из его коэффициентов равен единице; 2) в написанном для него выражении нет подобных членов.

Введем обозначения

$$p(p+2)=(p+1)^2-1=\psi(p),$$
$$\lambda_1=\psi(0)+1=1^2,$$
$$\lambda_2=\psi(0)+\psi(1)+2=1^2+2^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_n=\psi(0)+\psi(1)+\dots+\psi(n-1)+n=1^2+2^2+\dots+n^2$$

и рассмотрим ряд

$$H_0(z)+\frac{1}{\sqrt{1}}z^{\lambda_1}H_1(z)+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{\lambda_2}H_2(z)+\dots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n}H_n(z)+\dots, \tag{5}$$

представление которого в виде степенного ряда требует только разложения многочленов $H_0(z)$, $H_1(z)$,... по степеням z. Действительно, наибольшая степень в $H_0(z)$ равна нулю, наименьшая в $z^{\lambda_1}H_1(z)$ равна λ_1 ($=1$), а наибольшая $\lambda_1+\psi(1)$ ($=\lambda_1+3$); наименьшая в $z^{\lambda_2}H_2(z)$ равна λ_2($=\lambda_1+\psi(1)+1$) и т. д. Так как модуль любого из коэффициентов многочлена $H_n(z)$ равен единице, то *коэффициенты ряда* (5), *рассматриваемого как степенной ряд, стремятся к нулю, а радиус сходимости, (который легко вычисляется по формуле Коши), равен единице.*

В то же время в любой точке окружности $|z|=1$ ряд (5) расходится. Действительно, пусть $z=\xi$, $|\xi|=1$. Разделим окружность на $(n+1)$ равных дуг с центрами в точках 1, $e^{i\frac{2\pi}{n+1}}$, $e^{i\frac{2\pi}{n+1}2}$,... . Тогда ξ принадлежит одной из этих дуг или является общим концом двух таких дуг. Следовательно, для входящего в $H_n(z)$ выражения θ_n будем иметь

$$|\theta_n(\xi)|\geqslant\frac{2}{\pi}(n+1)$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\xi^{\lambda_n+k(n+1)}\theta_n\right|=\infty.$$

Отсюда, на основании критерия сходимости Коши, следует расходимость ряда (5) при $z=\xi$.

§ 7. Теорема А. А. Маркова

Двойной ряд

$$\begin{array}{llll} a_{00} & a_{01} & a_{02}\ldots & a_{0n}\ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n}\ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2}\ldots & a_{kn}\ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \qquad (1)$$

называется суммируемым по строкам, если сходятся ряды

$$a_{k0}+a_{k1}+\ldots+a_{kn}+\ldots,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots \qquad (2)$$

и ряд

$$z_1+z_2+\ldots+z_m+\ldots,$$

где z_k — суммы рядов (2).

Аналогично определяется суммируемость по столбцам. Если ряд (1) суммируем по строкам и по столбцам, то результаты таких суммирований, вообще говоря, не совпадают, как это следует из рассмотрения двойного ряда:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right),\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right),\ldots,\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right),\ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2,\ldots,\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right),\ldots$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^k,\ldots,\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k-$$
$$-\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k,\ldots$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Результат суммирования этого ряда по строкам, как легко проверить, равен 1/2, а результат суммирования по столбцам равен —1/2.

А. А. Марков указал признак того, что из суммируемости ряда (1) по строкам следует суммируемость его по столбцам и что результаты двух суммирований совпадают.

Теорема А. А. Маркова. *Пусть: 1°. Ряд* (1) *суммируем по строкам; 2°. Сходятся ряды*

$$a_{0n}+a_{1n}+\ldots+a_{kn}+\ldots,\ n=0,\ 1,\ldots \tag{4}$$

3°. *При* $m\to\infty$

$$R_m=\sum_{k=0}^{\infty} r_m^k\to 0;\qquad r_m^k=\sum_{n=m}^{\infty} a_{kn}.$$

Тогда ряд (1) *суммируем по столбцам и результат такого суммирования совпадает с результатом суммирования по строкам.*

Доказательство. Заметив, что

$$a_{kn}=r_n^k-r_{n+1}^k,$$

найдем

$$a_{0n}+a_{1n}+\ldots+a_{qn}=(r_n^0+\ldots+r_n^q)-(r_{n+1}^0+\ldots+r_{n+1}^q).$$

Следовательно,

$$S_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}=R_n-R_{n+1},$$

$$S_0+S_1+\ldots+S_n=R_0-R_{n+1},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_m=R_0=\sum_{m=0}^{\infty} z_m.$$

В следующем параграфе мы укажем применение теоремы А. А. Маркова.

Замечание. Если ряд (1) является абсолютно-сходящимся, то результаты суммирования по строкам и по столбцам всегда совпадают.

§ 8. Преобразование Эйлера

В дальнейшем нам понадобится ссылка на один факт из теории пределов. Мы и начнем с установления этого факта.

Лемма 1. Пусть последовательность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ldots$$

обладает свойством

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,$$

а треугольная матрица

$$\begin{matrix} a_{00} & \\ a_{10} & a_{11} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{20} & a_{21} & a_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

— свойствами:

1°. $a_{np} \to 0$, когда $n \to \infty$, для каждого $p = 0, 1, 2, \ldots$

2°. При любом n

$$|a_{n0}| + |a_{n1}| + \cdots + |a_{nn}| < K,$$

где K не зависит от n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n) = 0.$$

Доказательство. Возьмем фиксированное число m так, чтобы при наперед заданном $\varepsilon > 0$ имели место неравенства

$$|x_k| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad k > m,$$

и пусть $n > m$. Тогда, на основании 2°, получим

$$|a_{n,\,m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{nn} x_n| \leqslant$$

$$\leqslant \{ |a_{n,\,m+1}| + \cdots + |a_{nn}| \} \cdot \max_{m<k\leqslant n} |x_k| \leqslant$$

$$\leqslant \{ |a_{n0}| + |a_{n1}| + \cdots + |a_{nn}| \} \cdot \max_{m<k\leqslant n} |x_k| <$$

$$< K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2},$$

а на основании 1° (m фиксированно!)

$$|a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nm} x_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если взять n достаточно большим.

Следовательно,

$$|a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{n0} x_0 + \cdots + a_{nm} x_m| + |a_{n,\,m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{nn} x_n| < \varepsilon.$$

Лемма 2. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$$

и C_n^k — биномальные коэффициенты. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + C_n^1 y_1 + C_n^2 y_2 + \cdots + C_n^{n-1} y_{n-1} + y_n}{2^n} = \alpha. \quad (1)$$

Доказательство. Введем обозначения

$$x_k = y_k - \alpha, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Тогда будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + C_n^1 y_1 + \cdots + C_n^{n-1} y_{n-1} + y_n}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + C_n^1 x_1 + \cdots + C_n^{n-1} x_{n-1} + x_n + \alpha(1 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + 1)}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + C_n^1 x_1 + \cdots + x_n}{2^n} + \alpha. \tag{2}$$

Но двойная последовательность чисел

$$a_{np} = \frac{C_n^p}{2^n},$$

как легко проверить, удовлетворяет условиям 1°, 2° предыдущей леммы.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \cdots + x_n}{2^n} = 0$$

и из (2) получаем (1).

Перейдем теперь к преобразованию Эйлера. Рассмотрим числовой ряд

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^k a_k + \ldots, \tag{3}$$

в котором a_i не обязательно положительно (то есть ряд (3) не обязательно знакопеременный — множитель $(-1)^k$ в $(k+1)$-м члене ряда выделен для удобства дальнейших записей). Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&\Delta^0 a_k = a_k,\\
&\Delta^1 a_0 = a_0 - a_1, \ldots,\ \Delta^1 a_k = a_k - a_{k+1}, \ldots,\\
&\Delta^2 a_0 = \Delta^1 a_0 - \Delta^1 a_1, \ldots,\ \Delta^2 a_k = \Delta^1 a_k - \Delta^1 a_{k+1}, \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^n a_0 = \Delta^{n-1} a_0 - \Delta^{n-1} a_1, \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Методом индукции легко проверить, что

$$\Delta^n a_k = a_k - C_n^1 a_{k+1} + C_n^2 a_{k+n} - , \ldots + (-1)^n a_{k+n}. \tag{4}$$

Теорема Эйлера. *Если ряд* (3) *сходится, то сходится ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \frac{\Delta^1 a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} + \ldots + \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} + \ldots \tag{5}$$

и притом суммы рядов (3) *и* (5) *равны*..

Доказательство. Рассмотрим двойной ряд

$$\begin{matrix} a_{0)} & a_{01}\dots & a_{0n}\dots \\ a_{10} & a_{11}\dots & a_{1n}\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k0} & a_{k1}\dots & a_{kn}\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix},$$

в котором

$$a_{kn} = (-1)^k \left[\frac{\Delta^n a_k}{2^n} - \frac{\Delta^{n+1} a_k}{2^{n+1}}\right].$$

На основании леммы 2, ввиду (4) и того, что $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = 0$, получим

$$z_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \lim_{n\to\infty} (-1)^k \left[\frac{\Delta^0 a_k}{2^0} - \frac{\Delta^n a_k}{2^n}\right] = (-1)^k a_k.$$

Следовательно, сумму ряда (3) можно рассматривать как результат суммирования ряда (6) по строкам. Покажем, что ряд (5) является результатом суммирования ряда (6) по столбцам.

Действительно, так как $\Delta^{n+1} a_k = \Delta^n a_k - \Delta^n a_{k+1}$, то

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{\Delta^n a_k}{2^n} - \frac{\Delta^{n+1} a_k}{2^{n+1}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{n+1}} [\Delta^n a_k + \Delta^n a_{k+1}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} [(-1)^k \Delta^n a_k - (-1)^{k+1} \Delta^n a_{k+1}] =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} [\Delta^n a_0 - \lim_{k\to\infty} (\Delta^n a_k)] = \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}.$$

Теперь, чтобы доказать теорему, нам остается только проверить применимость теоремы А. А. Маркова. Сохраняя обозначения этой теоремы, имеем

$$r_m^k = (-1)^k \frac{\Delta^m a_k}{2^m},$$

$$R_m = \sum_{k=0}^{\infty} r_m^k = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^m a_k.$$

Введя обозначения
$r_k = (-1)^k (a_k - a_{k+1} + a_{k+2} - \ldots), \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$
получим

$$R_m = \frac{r_0 + C_m^1 r_1 + C_m^2 r_2 + \ldots + C_m^m r_m}{2^m}.$$

Так как r_k является остатком сходящегося ряда, то

$$r_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

На основании леммы 2 заключаем, что

$$R_m \to 0, \quad m \to \infty.$$

Теорема доказана.

Примеры.

1. $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right].$$

2. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}.$$

3. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

ГЛАВА III

§ 1. Необходимое условие существования условного экстремума

Задача нахождения условного экстремума формулируется следующим образом: среди значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые удовлетворяют заданным условиям $(m \leqslant n)$

$$\begin{gathered} \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

найти те, при которых функция $z = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеет минимум или максимум.

Мы будем предполагать, что функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы (имеют непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным) и для определенности будем говорить о минимуме. Необходимое условие существования условного минимума дается теоремой.

Теорема 1*. *Для того, чтобы функция $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при условиях* (1) *имела минимум в точке $M(a_1, a_2, \ldots a_n)$, необходимо существование постоянных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_m$, которые не все равны нулю, таких, чтобы все частные производные первого порядка функции*

$$F = \lambda_0 f + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_m \varphi_m \tag{2}$$

обращались в нуль в рассматриваемой точке.

Доказательство. Допустим, что при любых (не всех равных нулю) значениях постоянных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ хоть одно из выражений

$$\begin{gathered} \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}, \\ \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial y_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{gathered} \tag{3}$$

---

* Все теоремы § 1 и 2 изложены по Блиссу („Лекции по вариационному исчислению", М., 1950).

отлично от нуля в точке $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда в этой точке ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

будет равен $m+1$. Таким же, очевидно, будет и ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_n} & 2u \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} & 0 \end{matrix} \right\|$$

каким бы ни было u. На основании теоремы о существовании неявных функций можно утверждать, что в достаточно малой окрестности точки

$$y_1 = a_1, \ldots, y_n = a_n, \ u = 0$$

система уравнений

$$\begin{gathered} f(y_1, y_2, \ldots, y_n) + u^2 - f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

будет разрешима (в смысле существования решения) относительно $(m+1)$ из переменных, каковы бы ни были значения остальных $n-m$ переменных y_j, достаточно близкие к a_j. Таким образом, найдется хотя бы одна точка $(b_1 \ldots, b_n)$, в которой будет

$$\begin{gathered} f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) - u^2 < f(a_1, \ldots a_n), \\ \varphi_1(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \varphi_m(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0, \end{gathered}$$

а это означает, что в точке $M(a_1, \ldots, a_n)$ нет минимума. Итак, все выражения (3) хотя бы для одной совокупности значений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, должны обращаться в нуль в точке $M(a_1, \ldots, a_n)$.

Если в точке $M(a_1, \ldots, a_n)$ уравнения

$$\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (6)$$

возможны лишь при $\lambda_0 \neq 0$, то точка M называется *нормальной*. В этом случае, ввиду однородности уравнений (6), можно положить $\lambda_0 = 1$, и тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *В нормальной точке* $(\lambda_0 = 1)$ *множители* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *определяются однозначно.*

Действительно, если бы в той же точке было

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_i} + \ldots + \mu_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial v_i} = 0, \qquad i = 1,2, \ldots, n, \qquad (7)$$

то, вычтя (7) из (6), мы имели бы

$$(\lambda_1 - \mu_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \ldots + (\lambda_m - \mu_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} = 0,$$

и если бы хоть одна из разностей $\lambda_i - \mu_i$ была отлична от нуля, то точка M, противно предположению, не была бы нормальной. Точка минимума M называется *анормальной* с порядком анормальности q, если уравнения (6) при $\lambda_0 = 0$ определяют q линейно-независимых систем множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Известная теорема алгебры позволяет утверждать следующее.

Теорема 3. *Для того, чтобы порядок анормальности точки M был равен q, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке матрица*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{matrix} \right\|$$

имела ранг $m - q$.

Пример 1. Пусть

$$f = xy,$$

$$\varphi_1 = x - y = 0.$$

Так как, таким образом,

$$f = x^2,$$

то точка $M(0, 0)$ является точкой минимума. Ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \| 1, \ -1 \|$$

равен 1, то есть $q=0$ и точка M является нормальной. Система (6) в данном примере такова:

$$\lambda_0\cdot 0+\lambda_1=0$$
$$\lambda_0\cdot 0-\lambda_1=0$$

и так как обязательно $\lambda_1=0$, то мы должны (поскольку в теореме 1 речь идет о совокупности множителей, из которых хотя бы один отличен от нуля) считать $\lambda_0\neq 0$.

Пример 2. Пусть

$$f=x^2+y^2+z^2,$$
$$\varphi_1=x+y+z-3=0,$$
$$\varphi_2=x+y-z-1=0.$$

Легко проверить, что

$$f=2x^2-4x+5$$

и, следовательно, что точка $M(1, 1, 1)$ является точкой минимума. Это нормальная точка: ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{matrix}\right\|$$

равен 2 и в системе (соответствующей системе (6))

$$\lambda_0\cdot 2+\lambda_1+\lambda_2=0,$$
$$\lambda_0\cdot 2+\lambda_1+\lambda_2=0,$$
$$\lambda_0\cdot 2+\lambda_1-\lambda_2=0,$$

нельзя положить $\lambda_0=0$, так как тогда было бы также $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Пример 3. Пусть

$$u=(x+2y+3z-7)\,xy^2z^3, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=z+xy-2=0,\\ \varphi_2&=x+yz-2=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Легко проверить, что точка M (1, 1, 1) является точкой минимума. Действительно, из (9) находим

$$z=x,\ y=-1+\frac{2}{x},$$

и тогда

$$u=x(2-x)^2(4x^2-9x+4),$$
$$u'\big|_{x=1}=0,\ \ u''\big|_{x=1}>0.$$

Приравняв нулям производные функции $\lambda_0 u+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ в точке (1, 1, 1), получим

$$\lambda_1+\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2=0.$$

λ_0 остается неопределенным, в частности, можно положить $\lambda_0=0$. Таким образом, в рассматриваемом примере система (6) допускает решение

$$\lambda_0=0,\ \lambda_2=-\lambda_1.$$

Значит, точка (1, 1, 1) является анормальной с порядком анормальности 1.

Замечание. Во всех рассмотренных примерах мы находили точку минимума исключением зависимых переменных и сведением, тем самым, задачи нахождения условного экстремума к задаче нахождения экстремума функции одного переменного. Мы вынуждены были так поступить, так как в нашем распоряжении еще нет достаточных условий существования минимума.

Целью рассмотренных примеров являлось доказательство существования нормальных и анормальных точек, а не практика решения задач на максимум и минимум.

§ 2. Достаточное условие существования условного экстремума в нормальной точке

Достаточное условие, о котором будет идти речь, имеет место, собственно говоря, не только в случае нормальной точки. Мы будем лишь предполагать, что система уравнений (6) предыдущего параграфа допускает в исследуемой точке $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ решение $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\lambda_0\neq 0$. В случае нормальности точки M, λ_0 обязательно отлично от нуля. Однако, как показывает пример 3 предыдущего параграфа, и при анормальности точки M не исключается возможность положить $\lambda_0\neq 0$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция*

$$u=f(y_1, \ldots, y_n) \tag{1}$$

при дополнительных условиях

$$\begin{matrix}\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)=0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_n)=0\end{matrix} \tag{2}$$

имела минимум в точке $M(a_1, \ldots, a_n)$, в которой система уравнений

$$\begin{matrix}\lambda_0\dfrac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_1}=0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{matrix} \tag{3}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial y_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} = 0$$

допускает решение $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, достаточно, чтобы при любых по знаку бесконечно-малых $h_1, \ldots, h_n$, связанных соотношениями

$$h_1 \varphi_{iy_1}(a_1, \ldots, a_n) + h_2 \varphi_{iy_2}(a_1, \ldots, a_n) + \ldots + \\ + h_n \varphi_{iy_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0, \qquad (4) \\ i = 1, 2, \ldots, m$$

соблюдалось неравенство

$$\sum_{i, k} F_{y_i y_k}(a_1, \ldots, a_n) h_i h_k > 0, \qquad (5)$$

где

$$F(y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(y_1, \ldots, y_n). \qquad (6)$$

Применив формулу Тэйлора с остаточным членом в форме интеграла* к функциям f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, найдем

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} h_i f_{y_i}(a_1, \ldots, a_n) + \int_0^1 (1 - \theta) \sum_{i, k} f_{y_i y_k}(a_1 + \theta h_1, \ldots) h_i h_k \, d\theta, \quad (7)$$

---

* Эта формула в случае функции одного переменного имеет вид

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b - a)^{(m-1)}}{(m - 1)!} f^{m-1}_{(a)} + \\ + \frac{(b - a)^m}{(m - 1)!} \int_0^1 (1 - \theta)^{m-1} f^{(m)}(a + \theta \overline{b - a}) \, d\theta. \qquad (7_1)$$

Из формулы (7_1) следует:

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{1}{(m - 1)!} F^{(m-1)}_{(a)} + \\ + \frac{1}{(m - 1)!} \int_0^1 (1 - \theta)^{m-1} F^{(m)}(\theta) d\theta.$$

Если в последней формуле положить

$$F(t) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2, \ldots, a_n + th_n),$$

то при $m = 2$ получится формула (7).

$$0=\sum_{i=1}^{n} h_i \varphi_{jy_i}(a_1, \ldots, a_n)+$$

$$+\int_0^1 (1-\theta)\sum_{i,k}\varphi_{jy_i y_k}(a_1+\theta h_1, \ldots)\, h_i h_k d\theta^*. \qquad (8)$$

$$j=1,\ 2, \ldots m$$

На основании (3) из (7) и (8) получим

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)-f(a_1, \ldots, a_n)=$$

$$=\int_0^1 (1-\theta)\sum_{i,k} F_{y_i y_k}(a_1+\theta h_1, \ldots)\, h_i h_k d\theta. \qquad (9)$$

Из условия (5) при достаточно малых $h_1, \ldots, h_n$, ввиду предположенной непрерывности частных производных второго порядка функций f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, вытекает положительность правой части равенства (9). Следовательно,

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)-f(a_1, \ldots, a_n)>0,$$

то есть $f(a_1, \ldots, a_n)$ является минимумом функции f.

Лемма. Если точка $M(a_1, \ldots, a_n)$ нормальна, то для каждой совокупности величин $h_1, \ldots, h_n$, удовлетворяющих уравнения (4), найдется система функций $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, обладающих свойствами

1°. $\varphi_i(y_1(t), \ldots, y_n(t))=0,\ i=1,\ 2, \ldots m.$

2°. В окрестности значения $t=0$ существуют и непрерывны производные второго порядка $y_i''(t)$.

3°. $y_i(0)=a_i,\ y_i'(0)=h_i.$

Введем в рассмотрение еще $n-m$ дважды непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_j(y_1, \ldots, y_n)$, $j=m+1, \ldots, n$ так, чтобы было

$$\left.\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right|_M \neq 0, \qquad (10)$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_1(y_1, \ldots, y_n)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_m(y_1, \ldots, y_n)=0,$$

$$\varphi_{m+1}(y_1 \ldots, y_n)-\varphi_{m+1}(a_1, \ldots, a_n)-t\sum_{\varepsilon=1}^{n}\varphi_{m+1 y_i}(a_1, \ldots, a_n)h_i=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)$$

$$\varphi_n(y_1, \ldots, y_n)-\varphi_n(a_1, \ldots, a_n)-t\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ny_i}(a_1, \ldots, a_n)h_i=0.$$

---

* Естественно, рассматриваются только те значения h_i, которые удовлетворяют условиям $\varphi_j(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)=0$.

Система (11), на основании (10), определяет $y_1 \ldots, y_n$ как дважды дифференцируемые функции от t, удовлетворяющие условиям

$$y_i(0) = a_i.$$

Подставив в (11) значения $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, определяемые этими уравнениями, и, продифференцировав полученные тождества по t при $t=0$, получим

$$\varphi_{iy_1}(a_1, \ldots, a_n)\,y'_1(0) + \ldots + \varphi_{iy_n}(a_1, \ldots, a_n)\,y'_n(0) = 0, \quad (12)$$

$$i = 1, \ldots, m;$$

$$\varphi_{jy_1}(a_1, \ldots, a_n)\,y'_1(0) + \ldots + \varphi_{jy_n}(a_1, \ldots, a_n)\,y'_n(0) -$$
$$- \varphi_{jy_1}(a_1, \ldots, a_n)\,h_1 - \cdots - \varphi_{jy_n}(a_1, \ldots, a_n)\,h_n = 0, \quad (13)$$

$$j = m+1, \ldots, n.$$

Вычтя из уравнения (12) соответствующие уравнения (4), мы получим уравнения, которые вместе с уравнениями (13) образуют систему линейных, однородных относительно величин $y'_1(0) - h_1, \ldots, y'_n(0) - h_n$ уравнений

$$\varphi_{ky_1}(a_1, \ldots, a_n)\,[y'_1(0) - h_1] + \ldots +$$
$$+ \varphi_{ky_n}(a_1, \ldots, a_n)\,[y'_n(0) - h_n] = 0. \quad (14)$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Ввиду условия (10), из системы (14) следует

$$y'_1(0) - h_1 = 0, \ldots, y'_n(0) - h_n = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если функция* (1) *при условиях* (2) *имеет минимум в нормальной точке* $M(a_1, \ldots, a_n)$, *то функция* (6) *(образованная с помощью единственно существующей системы множителей* $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \ldots \lambda_n$*) должна удовлетворять условию*

$$\sum_{i,\,k} F_{y_i y_k}(a_1, \ldots, a_n)\,h_i h_k \geqslant 0 \quad (15)$$

при любых $h_1, \ldots, h_n$, *удовлетворяющих условиям* (4).

Действительно, пусть $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — функции, о которых шла речь в лемме. Тогда функция

$$\psi(t) = f(y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

должна иметь минимум при $t=0$. Следовательно, должно быть

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) \geqslant 0. \quad (16)$$

Так как из (11) следует

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{jy_i}(v_1(t), \ldots, y_n(t))\, y_i'(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то

$$\psi'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{y_i}(y_1(t), \ldots, y_n(t))\, y_i'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_{y_i}(y_1(t), \ldots, y_n(t))\, y_i'(t),$$

$$\psi''(t) = \sum_{i,\,k} F_{y_i y_k}(y_1(t), \ldots, y_n(t))\, y_i'(t)\, y_k'(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} F_{y_i}(y_1(t), \ldots, y_n(t))\, y_i''(t).$$

При $t = 0$ будет

$$y_i(0) = a_i, \quad y_i(0) = h_i; \quad i = 1, \ldots, n$$

(по лемме) и

$$F_{y_i}(y_1(0), \ldots, y_n(0)) = F_{y_i}(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

— на основании ранее доказанного необходимого условия минимума (теорема 1, параграфа 1). Следовательно,

$$\psi''(0) = \sum_{i,\,k} F_{y_i y_k}(a_1, \ldots, a_n)\, h_i h_k.$$

Остается вспомнить неравенство (16). Теорема доказана.

Замечание 1. Задача нахождения экстремума тривиальна, если точка $M(a_1, \ldots, a_n)$ является единственной точкой, определяемой системой уравнений

$$\varphi_i(y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{17}$$

Доказанная выше лемма обнаруживает, что в случае нормальной точки задача о нахождении условного экстремума никогда не является тривиальной, так как из леммы следует существование бесконечного множества точек, удовлетворяющих уравнениям (17), если им удовлетворяет нормальная точка $M(a_1, \ldots, a_n)$. В случае анормальной точки задача о нахождении условного экстремума может (но не обязательно, см. пример 3 § 1) оказаться тривиальной.

Пример 4. Будем искать минимум функции

$$f = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{2}{3}\right)^2 \tag{18}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x-2y+2z+3=0, \\ \varphi_2 &= x^2+y^2+z^2-1=0. \end{aligned} \qquad (19)$$

Легко проверить, что значения $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$ удовлетворяют уравнения (19) и очевидно, что в точке $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ функция (18) имеет минимум. Рассматриваемая задача тривиальна, но не потому, конечно, что $f(x, y, z) \geqslant 0$, а $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)=0$. Ведь минимумом функции (18) будет вовсе не нуль, если заменить условия (19) другими, например, условиями

$$\begin{aligned} x-2y+2z+3&=0, \\ x+2y-z+1&=0. \end{aligned}$$

Задача тривиальна потому, что точка $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ является единственной точкой, определяемой уравнениями (19). Действительно, исключив из уравнений (19) x, получим

$$(2y-2z-3)^2+y^2+z^2=1.$$

Отсюда

$$5z=2(2y-3) \pm \sqrt{-(3y-2)^2}$$

и, следовательно, значение z вещественно лишь при $y=\frac{2}{3}$ $\left(\text{а тогда } z=-\frac{2}{3},\ x=-\frac{1}{3}\right)$. Точка $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ анормальна — множители λ_0, λ_1, λ_2 определяются из уравнений

$$\begin{aligned} &2\lambda_0 \cdot 0+\lambda_1+2\lambda_2 \frac{-1}{3}=0, \\ &2\lambda_0 \cdot 0+\lambda_1(-2)+2\lambda_2 \frac{2}{3}=0, \\ &2\lambda_0 \cdot 0+\lambda_1 \cdot 2+2\lambda_2 \cdot \frac{-2}{3}=0 \end{aligned}$$

и можно положить $\lambda_0=0$, $\lambda_1=-\frac{2}{3}\lambda_2$.

Замечание 2. Условие (15) не является необходимым в случае анормальной точки.

Пример 5. Пусть

$$\begin{aligned} f&=x^2-y^2, \\ \varphi&=xy-y^2=0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что точка (0, 0) является анормальной точкой минимума. Множители λ_0, λ_1, определяемые для точки (0, 0) уравнениями

$$2\lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 0 = 0,$$
$$-2\lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 0 = 0,$$

можно положить равными, соответственно, 0 и 1 (значит точка анормальна), но можно также положить $\lambda_0 = \lambda = 1$, и тогда будет

$$F = \lambda_0 f + \lambda_1 \varphi = x^2 - y^2 + xy - y^2.$$

В точке (0, 0) будем иметь

$$A = F_{xx} h^2 + 2F_{xy} hk + F_{yy} k^2 = 2\left\{\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} k^2\right\},$$
$$0 = \varphi_x h + \varphi_y k = 0 \cdot h + 0 \cdot k.$$

Следовательно, связь между h и k не устанавливается, и необязательно $A \geqslant 0$.

Рассмотренный пример не противоречит теореме 1, так как в этой теореме речь идет о достаточном условии. Этим примером, между прочим, подчеркивается также и то, что если условие (5) теоремы 1 выполняется хотя бы для одной из возможных систем множителей $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1, \ldots$, то этого уже достаточно для существования минимума.

В нашем примере условие (5) будет, например, выполнено, если положить $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -4$.

Вернемся к теореме 1. Оказывается, что эту теорему без ограничения общности можно доказывать, считая точку $M(a_1, \ldots, a_n)$ нормальной. Это следует из такого утверждения.

Теорема 3. *Пусть в теореме* 1 *точка* $M(a_1, \ldots, a_n)$ *анормальна с порядком анормальности* q *и пусть* (*чем не ограничивается общность*) *матрица*

$$\left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{array} \right\|_M \qquad (20)$$

имеет ранг $m - q$. *Тогда точка* $M(a_1, \ldots, a_n)$ *является нормальной точкой, если речь идет о минимуме функции*

$$g = f + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q \qquad (21)$$

при условиях

$$\varphi_j(y_1, \ldots, y_n) = 0, \ j = q + 1, \ldots, m. \qquad (22)$$

Для функции g условия теоремы 1 *выполняются при* $\lambda_0 = 1$ $\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_n$. *Если g имеет минимум в M, то f тоже имеет минимум в M.*

Доказательство. Нормальность точки M в задаче о минимуме функции (21) при условиях (22) сразу следует из того, что матрица (21) имеет ранг $m - q$.

Так как ранг матрицы, составленной из коэффициентов уравнений (4), равен $m - q$, то система уравнений (4) является следствием последних $m - q$ уравнений этой системы. Поэтому условие (5) теоремы 1 выполняется для всех h_i, удовлетворяющих условиям

$$h_1\varphi_{jy_1}(a_1, \ldots, a_n) + \ldots + h_n\varphi_{jy_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0, \quad j = q + 1, \ldots, n$$

и так как

$$F = g + \sum_{r=q+1}^{n} \lambda_r \varphi_r,$$

то условие (5) выполняется одновременно для функций g и f. Наконец, так как множество точек, определяемых уравнениями (2), содержится в множестве точек, определяемых уравнениями (22), то, если $g(a_1 \ldots, a_n)$ является минимумом функции $g(y_1, \ldots, y_n)$, $f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$ будет минимумом функции $f(y_1, \ldots, y_n)$. Теорема доказана.

Пример 6 (см. пример 3). Пусть

$$f = (x + 2y + 3z - 7)\, xy^2 z^3,$$
$$\varphi_1 = z + xy - 2 = 0,$$
$$\varphi_2 = x + yz - 2 = 0.$$

В точке M (1, 1, 1) имеем

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,$$
$$\lambda_0 f_x + \lambda_1 \varphi_{1x} + \lambda_2 \varphi_{2x} = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_0 f_y + \lambda_1 \varphi_{1y} + \lambda_2 \varphi_{2y} = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_0 f_z + \lambda_1 \varphi_{1z} + \lambda_2 \varphi_{2z} = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Можно, в частности, положить $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Мы видели, что точка M (1, 1, 1) анормальна порядка 1. Положим

$$g = f + \varphi; \quad F = g - \varphi_2.$$

В точке M (1, 1, 1) будем иметь

$$0 = h\varphi_{2x} + k\varphi_{2y} + l\varphi_{2z} = h + k + l = 0,$$
$$F_{xx}h^2 + F_{yy}k^2 + F_{zz}l^2 + 2F_{xy}hk + 2F_{xz}hl + 2F_{yz}kl =$$
$$= 2h^2 + 6k^2 + 12l^2 + 6hk + 6hl + 14kl =$$
$$= 2k^2 + 8l^2 + 6kl = 2\left\{\left(k + \frac{3}{2}l\right)^2 + \frac{7}{4}l^2\right\} > 0,$$

функции f и g имеют минимум в M (1, 1, 1).

Замечание. Все доказанные выше теоремы являются прототипами теорем вариационного исчисления.

§ 3. Задача приведения квадратичной формы к главным осям как задача на условный экстремум

1. Формулировка задачи. В курсе алгебры рассматривается и чисто алгебраическими средствами решается важная для приложений задача: дана квадратичная форма

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

найти ортогональное преобразование

$$x_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \cdots + \alpha_{in} y_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(A)}$$

в результате которого форма (1) переходит в форму

$$B(y, y) = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \cdots + m_n y_n^2,$$

содержащую только квадраты переменных. Напомним, что преобразование (A) ортогонально, если

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \cdots + \alpha_{in}^2 = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы покажем, что сформулированную задачу можно решить как задачу на условный экстремум.

2. Общий случай. Будем считать решенными n задач на разыскание максимума функции

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (1)$$

при дополнительных условиях:

$$1)\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1;$$

$$2)\ \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1, \\ l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \cdots + l_{1n} x_n = 0, \end{cases}$$

где $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n}$ — совокупность значений, соответственно, переменных $x_1, \ldots, x_n$, при которых $A(x, x)$ достигает максимум λ_1, при условии 1);

$$3)\ \begin{cases} x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1, \\ l_{11}x_1+l_{12}x_2+\cdots+l_{1n}x_n=0, \\ l_{21}x_1+l_{22}x_2+\cdots+l_{2n}x_n=0, \end{cases}$$

где $l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2n}$ — совокупность значений, соответственно, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых $A(x, x)$ достигает максимум λ_2 при условиях 3);

$$n)\ \begin{cases} x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1, \\ l_{11}x_1+l_{12}x_2+\cdots+l_{1n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{n-1,1};\ x_1+l_{n-1,2}x_2+\cdots+l_{n-1,n}x_n=0, \end{cases}$$

где $l_{n-1.1}$; ...; $l_{n-1,n}$ — совокупность значений, соответственно, $x_1, \ldots, x_n$, при которых $A(x, x)$ достигает максимум λ_{n-1} при условиях $n-1$. Последняя из рассматриваемых задач тривиальна (n дополнительных условий), ее решением пусть будет

$$\max A(x, x)=\lambda_n;\ x_1=l_{n1},\ x_2=l_{n2},\ \ldots,\ x_n=l_{nn}.$$

Решения всех n задач существуют, так как каждый раз речь идет о максимуме непрерывной функции на замкнутом множестве, а такой максимум по теореме Вейерштрасса существует и достигается хотя бы для одной совокупности значений переменных.

С геометрической точки зрения очевидно, что множества, определяемые условиями 1), 2),... замкнуты. Аналитически можно в этом убедиться следующим образом. Множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию 1), замкнуто, так как

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=1,$$

если $\alpha_1=\lim x_1, \ldots, \alpha_n=\lim x_n$ (с геометрической точки зрения уравнение 1) представляет n-мерную единичную сферу). Множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию 2), замкнуто, так как и уравнения 2) сохраняются при предельном переходе (с геометрической точки зрения уравнения 2) представляют пересечение n-мерной единичной сферы с плоскостью); и т. д.

Рассмотрим теперь линейное преобразование

$$\begin{aligned} y_1&=l_{11}x_1+l_{12}x_2+\cdots+l_{1n}x_n, \\ y_2&=l_{21}x_1+l_{22}x_2+\cdots+l_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n&=l_{n1}x_1+l_{n2}x_2+\cdots+l_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Это ортогональное преобразование, так как совокупности коэффициентов $(l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n})$, $(l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2n})$, $(l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nn})$ удовлетворяют условиям 1), 2), ..., n) и поэтому

$$l_{k1}^2+l_{k2}^2+\ldots+l_{kn}^2=1,\ k=1, 2, \ldots, n,$$

$$l_{k1}l_{m1}+l_{k2}l_{m2}+\ldots+l_{kn}l_{mn}=0,\ k\neq m;\ m=1, 2, \ldots, n.$$

Обратным к преобразованию (2) будет преобразование (тоже ортогональное)

$$\begin{aligned} x_1&=l_{11}y_1+l_{21}y_2+\cdots+l_{n1}y_n,\\ x_2&=l_{12}y_1+l_{22}y_2+\cdots+l_{n2}y_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=l_{1n}y_1+l_{2n}y_2+\ldots+l_{nn}v_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Теорема. *В результате преобразования* (3) *форма* (1) *переходит в форму*

$$B(y, y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть форма (1) переходит, в результате преобразования (3), в форму

$$C(y, y)=\sum_{i,j} C_{ij}y_i y_j. \qquad (5)$$

Если в форме (1) положить $x_1=l_{11}$, $x_2=l_{12}$, ..., $x_n=l_{1n}$, то в форме (5), ввиду (2), придется положить $y_1=1$, $y_2=y_3=\ldots=y_n=0$, и она сведется к одному слагаемому C_{11}. Так как при указанных значениях x_1, x_2, ..., x_n форма (1) принимает значение λ_1, то

$$C_{11}=\lambda_1, \qquad (6)$$

а λ_1, подчеркнем, является максимумом формы (1) — (5). Точно так же можно убедиться, что $C_{22}=\lambda_2$, ..., $C_{nn}=\lambda_n$.

Заметим теперь, что

$$H(y, y)=\sum_{i,j} h_{ij}y_i y_j=C(y, y)-\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n)\leqslant 0 \qquad (7)$$

при любых значениях y_1, y_2, ..., y_n.

Действительно, если $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=1$, то

$$H(z, z)=C(z, z)-\lambda_1\leqslant 0, \qquad (8)$$

так как λ_1 является максимумом формы $C(z, z)$ при условии $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2=1$. Положив в (8)

$$z_i=\frac{y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}},$$

мы получим, ввиду того, что $H(z, z)$, $C(z, z)$ — квадратичные формы, неравенство (7).

Теперь докажем, что $H(y, y)$ не содержит y_1, то есть, что $h_{ij}=0$, если хотя бы один из индексов i, j равен единице. Что $h_{11}=0$ — следует сразу из (6). Допустим, например, что $h_{12}(=h_{21})\neq 0$ и положим $y_1=1$, $y_2=\varepsilon$, $y_3=y_4=\ldots y_n=0$. $H(y,\ y)$ примет значение

$$2h_{12}\varepsilon+h_{22}\varepsilon^2=\varepsilon(2h_{12}+h_{22}\varepsilon),$$

которое при достаточно малом ε, имеющем тот же знак, что h_{12}, будет положительным, что невозможно ввиду (7).

Таким образом,

$$C(y,\ y)=\lambda_1 y_1^2+\{H(y,\ y)+\lambda_1(y_2^2+\ldots+y_n^2)\}=$$
$$=\lambda_1 y_1^2+C_1(y,\ y),$$

где $C_1(y,\ y)$ — квадратичная форма переменных $y_2,\ \ldots,\ y_n$. Так как

$$C(y,\ y)|_{y_1=0}=C_1(y,\ y),$$

то повторение предыдущих рассуждений приведет к выводу, что

$$C_1(y,\ y)=\lambda_2 y_2^2+C_2(y,\ y),$$

где $C_2(y,y)$ — квадратичная форма переменных $y_3,\ldots,\ y_n$. Продолжив такие рассуждения, получим

$$C(y,\ y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2,$$

и теорема доказана.

Пример. Пусть

$$A(x,x)=-14x_1^2+25x_2^2+25x_3^2+16x_1x_2-16x_1x_3+22x_2x_3. \quad (9)$$

Найдем максимум функции (9) при условии

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1. \quad (10)$$

Приравняв нулю частные производные первого порядка функции

$$\lambda_0 A(x,\ x)+\lambda_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1),$$

получим

$$\begin{aligned}&\lambda_0(-14x_1+8x_2-8x_3)+\lambda_1 x_1=0,\\&\lambda_0(8x_1+25x_2+11x_3)+\lambda_1 x_2=0,\\&\lambda_0(-8x_1+11x_2+25x_3)+\lambda_1 x_3=0.\end{aligned} \quad (11)$$

Можно положить $\lambda_0=1$, так как если бы мы положили $\lambda_0=0$, то пришлось бы считать $x_1=x_2=x_3=0$, что несовместимо с условием (10). По той же причине

$$\begin{vmatrix}-14+\lambda_1 & 8 & -8\\ 8 & 25+\lambda_1 & 11\\ -8 & 11 & 25+\lambda_1\end{vmatrix}=0, \quad (12)$$

то есть

$$\lambda_1^3+36\lambda_1^2-324\lambda_1-11664=0,$$

$$\lambda_1=-36,\ -18,\ 18.$$

При $\lambda_1=-36$ (и $\lambda_0=1$) система (11) дает

$$x_1=0,\ x_2=x_3,$$

и тогда из (10)

$$x_2=x_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (13)$$

Легко проверить, что при $x_1=0$, $x_2=x_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеем максимум и притом $\max A(x,\ x)=36$.

Теперь станем искать максимум функции (9) при условиях

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, \qquad (14)$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{x_3}{\sqrt{2}}=0$$

(обратите внимание на связь последнего условия со значениями $x_1=0$, $x_2=x_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, при которых достигается максимум в предыдущей задаче).

После обычных, очень простых вычислений найдем, что максимум достигается при

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=-\frac{2}{3}, \qquad (15)$$

и равен 18. Наконец, станем искать максимум функции (9) при условиях (снова обратите внимание на связь последнего условия со значениями (15) величин x_1, x_2, x_3)

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{x_3}{\sqrt{2}}=0, \qquad (16)$$

$$\frac{x_1}{3}+\frac{2x_2}{3}-\frac{2x_3}{3}=0.$$

Это уже тривиальная задача, так как из условий (16) сразу находим, что

$$x_1=-\frac{4}{3\sqrt{2}},\ x_2=\frac{1}{3\sqrt{2}},\ x_3=-\frac{1}{3\sqrt{2}},$$

или что

$$x_1=\frac{4}{3\sqrt{2}},\ x_2=-\frac{1}{3\sqrt{2}},\ x_3=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

В обоих случаях $A(x, x) = -18$.

Положим теперь

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 +{}} \frac{1}{3}y_2 + \frac{4}{3\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3 \end{aligned} \tag{17}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} y_1 &= \phantom{\frac{x_1}{3} +{}} \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}, \\ y_2 &= \frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 &= \frac{4}{3\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}x_3. \end{aligned}$$

Преобразование (17) ортогонально. Подставив значения (17) величин x_1, x_2, x_3 в (9), получим

$$36y_1^2 + 18y_2^2 - 18y_3^2. \tag{18}$$

Итак, мы нашли ортогональное преобразование (17), приводящее форму (9) к форме (18) (обратите внимание на то, что коэффициентами формы (18) суть последовательно найденные условные максимумы формы (9).

Замечание 1. Можно было также воспользоваться, например, преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 +{}} \frac{1}{3}y_2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3. \end{aligned}$$

Замечание 2. Мы видели в приведенном выше примере, что λ_1, λ_2, λ_3 являются корнями определителя

$$\begin{vmatrix} -14-\lambda & 8 & -8 \\ 8 & 25-\lambda & 11 \\ -8 & 11 & 25-\lambda \end{vmatrix}$$

Докажем, что в общем случае формы (1), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются корнями определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

Действительно, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются корнями определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n-\lambda \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

соответствующего форме

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2-\lambda(y_1^2+\dots+y_n^2), \qquad (21)$$

которая получается из формы

$$K(x, x)-\lambda(x_1^2+\dots+x_n^2) \qquad (22)$$

с помощью ортогонального преобразования. Так как форме (21) соответствует определитель (20), то определители (19) и (20), тождественно относительно λ, равны.

Замечание 3. Практически нет оснований предпочитать приведенный способ преобразования квадратичной формы к главным осям известному алгебраическому методу.

С теоретической точки зрения указанный способ весьма важен, так как он обобщается на случай так называемых гильбертовых пространств, которые приходится рассматривать, например, в теории интегральных уравнений.

ГЛАВА IV

§ 1. Трансцендентность числа e

Мы воспользуемся двумя легко доказываемыми формулами:

$$I_k=\int_0^\infty e^{-x}x^k\,dx=k!, \tag{1}$$

k — целое положительное число:

$$U_k=\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx=\int_0^h e^{-x}f(x)\,dx+e^{-h}\int_0^\infty e^{-x}f(x+h)\,dx, \tag{2}$$

h — любое число.

Первая из этих формул следует из того, что, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k\,dx=-x^k e^{-x}\Big|_0^\infty+k\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}\,dk.$$

Таким образом,

$$I_k=kI_{k-1}=k(k-1)I_{k-2}=\cdots=k(k-1)\ldots2\cdot1\cdot I_0.$$

Но

$$I_0=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1,$$

и поэтому

$$I_k=k!$$

Формула (2) немедленно следует из равенства

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx=\int_0^h e^{-x}f(x)\,dx+\int_h^\infty e^{-x}f(x)\,dx,$$

если во втором интеграле положить

$$x=y+h.$$

Допустим теперь, что число e алгебраическое, то есть является корнем уравнения

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

с целыми коэффициентами.

Умножив тождество

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n \equiv 0 \qquad (3)$$

на $\int\limits_0^\infty e^{-x} f(x) dx$ и воспользовавшись формулой (2), получим тождество

$$0 = a_0 \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x) dx + a_1 e \left\{ \int\limits_0^1 e^{-x} f(x) dx + \right.$$

$$\left. + e^{-1} \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x+1) dx \right\} + a_2 e^2 \left\{ \int\limits_0^2 e^{-x} f(x) dx + \right.$$

$$\left. + e^{-2} \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x+2) dx \right\} + \ldots$$

$$+ a_n e^n \left\{ \int\limits_0^a e^{-x} f(x) dx + e^{-n} \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x+n) dx \right\},$$

или

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x+i) dx + \sum_{j=1}^{n} a_j e^j \int\limits_0^i e^{-x} f(x) dx = 0. \qquad (4)$$

Мы докажем, что если в качестве $f(x)$ взять надлежащую функцию, то первое слагаемое в левой части последнего тождества окажется отличным от нуля целым числом, а второе — правильной дробью. Но сумма таких двух чисел не может быть равной нулю. Таким образом, тождество (4), а вместе с ним и тождество (3) окажутся невозможными. Тем самым будет доказана невозможность предположения, что число e алгебраическое.

Положим

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p, \qquad (5)$$

где p — простое число, выбор которого мы далее уточним. Так как, расположив многочлен (5) по возрастающим степеням x, получим*

$$f(x) = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \ldots, \qquad (6)$$

---

* Так как p—простое (и, следовательно, нечетное) число, то $(-1)^p = -1$, $(-1)^{np} = (-1)^n$.

b_k — целые числа,
то, на основании формулы (1),

$$a_0\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx=\frac{a_0(-1)^n(n!)^p}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx+$$

$$+\frac{a_0b_1}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx+\dots$$

$$=a_0(-1)^n(n!)^p+a_1b_1p+\dots \qquad (7)$$

На основании той же формулы (1) и ввиду того, что

$$f(x+i)=\frac{1}{(p-1)!}(x+i)^{p-1}(x+i-1)^p\dots$$

$$\dots(x+1)^px^p(x-1)^p\dots(x-n+i)^p=$$

$$=\frac{C_1}{(p-1)!}x^p+\frac{C_2}{(p-1)!}x^{p+1}+\dots,$$

C_k — целые числа, при $i>0$, имеем

$$a_i\int_0^\infty e^{-x}f(x+i)\,dx=pA_i, \qquad (8)$$

где A_i — целое число.

Из (7) и (8) следует:

$$\sum_{i=0}^n a_i\int_0^\infty e^{-x}f(x+i)dx=(-1)^na_0(n!)^p+p\sum_{i=1}^n A_i. \qquad (9)$$

Если взять за p простое число, большее n и всех делителей числа a_0, то первое слагаемое во второй части последнего равенства не будет делиться на p. Поэтому сумма (9) является целым числом, не делящимся на p, то есть отличным от нуля.

Переходя к рассмотрению второго слагаемого в левой части тождества (4), заметим, что при изменении x от 0 до j и j от 1 до n, имеем

$$|f(x)|<\frac{1}{(p-1)!}n^{p-1}\underbrace{n^p\dots n^p}_{n\text{ раз}}=\frac{1}{(p-1)!}n^{p(n+1)-1}.$$

Кроме того,

$$e^{-x}<1,\ e^x\leqslant e^n$$

и поэтому

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)dx\right| < \frac{1}{(p-1)!} n^{p(n+1)-1} \{|a_1| + |a_2| + \\ + \ldots + |a_n|\} = M_n \frac{k_n^{p-1}}{(p-1)!},$$

где M_n, k_n не зависят от p. Так как

$$\lim_{p\to\infty} \frac{z^{p-1}}{(p-1)!} = 0,$$

то при достаточно большом p (а мы можем взять p сколь угодно большим),

$$M_n \frac{k_n^{p-1}}{(p-1)!} < 1.$$

Этим и заканчивается доказательство того, что e — трансцендентное число, так как из последнего неравенства следует, что второе слагаемое в равенстве (4) является правильной дробью и поэтому (первое слагаемое в том же равенстве — целое число!) равенство (4) невозможно.

ГЛАВА V

§ 1. Неравенство Абеля

В теории рядов оказывается весьма полезным доказанное Абелем неравенство

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right| \leqslant S b_0,$$

справедливое при предположениях:

1°. $\left|\sum_{i=0}^{k} a_i\right| \leqslant S, \ k=0,\ 1,\dots,\ n.$

2°. $b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n > 0.$

Доказательство. Введем обозначение

$$S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1}) b_i + S_0 b_0 = S_0(b_0 - b_1) + S_1(b_1 - b_2) + \dots + \\ + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right| \leqslant |S_0|(b_0 - b_1) + |S_1|(b_1 - b_2) + \dots + \\ + |S_{n-1}|(b_{n-1} - b_n) + |S_n| b_n \leqslant S\{(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots + \\ + (b_{n-1} - b_n) + b_n\} = Sb_0.$$

§ 2. Признак сходимости Дирихле

С помощью неравенства Абеля легко доказывается следующий признак сходимости рядов. Пусть ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ обладает свойством

$$\left|\sum_{i=0}^{p} a_i\right| \leqslant K, \quad p = 0,\ 1, \ldots \qquad (1)$$

где K не зависит от p. Если последовательность вещественных чисел

$$b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n, \ldots,$$

монотонно убывая, сходится к нулю, то ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, b_i$$

сходится. При этом, если a_i — функции, а K — постоянная, то ряд (2) сходится равномерно.

Доказательство. Из неравенства (1) следует

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{m} a_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| + \left|\sum_{i=0}^{m} a_i\right| \leqslant 2K$$

для любых значений m и n. На основании неравенства Абеля имеем

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\, b_i\right| \leqslant b_{m+1} \cdot 2K.$$

Следовательно, так как $b_m \to 0$ $(m \to \infty)$,

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\, b_i\right| < \varepsilon, \quad m,\ n \geqslant N(\varepsilon),$$

что, на основании критерия Коши, означает сходимость ряда (2), равномерную, если a_i — функции, а K—постоянная.

§ 3. Пример Фату

Легко показать, что равномерно-сходящийся тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \qquad (1)$$

является рядом Фурье своей суммы, то есть если суммой этого ряда является $S(x)$, то

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \cos mx\, dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \sin mx \, dx.$$

Фату в 1906 г. построил сходящийся (конечно, неравномерно на $[0,2\pi]$) тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье своей суммы. До рассмотрения этого ряда отметим, что необходимым признаком того, чтобы ряд (1) был рядом Фурье некоторой интегрируемой функции, является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

как это следует из теоремы об интегрировании рядов Фурье.

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin mx}{\ln m}.$$

Этот ряд сходится на $[0, \pi]$ (и на $[0,2\pi]$). Действительно,

$$\left| \sum_{m=2}^{k} \sin mx \right| = \left| \frac{\sum_{2}^{k} \left[\cos\left(m - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x \right.}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos \frac{3}{2} x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

если $0 < \alpha \leqslant x \leqslant \pi$. Ввиду того, что

$$\frac{1}{\ln m} > \frac{1}{\ln(m+1)}, \quad \frac{1}{\ln m} \to 0 \ (m \to \infty),$$

можно, на основании теоремы Дирихле, утверждать, что ряд (2) сходится (и даже равномерно) на каждом отрезке $[\alpha, \pi]$, $\alpha > 0$. При $x = 0$ ряд (2), очевидно, сходится. Таким образом, ряд (2) сходится на $[0, \pi]$. Он, однако, не может быть рядом Фурье своей суммы, так как ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

расходится, что легко проверить с помощью интегрального признака Коши.

§ 4. Пример Перрона *

Пример Фату, как мы видели, весьма прост, но так как не указана сумма ряда Фату, то представляется полезным привести пример элементарной функции, разлагающейся в тригонометрический ряд, но не в ряд Фурье. Такой пример, допускающий обобщения, был указан Перроном.

Построение примера, как будет показано ниже, основано на том, что функция

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)\ln(1-z)}$$

при $z\to 1$ обращается в бесконечность, а при $|z|\leqslant 1$, если только $z\neq 1$, разлагается в степенной ряд. Этот ряд, если положить $z=e^{i\varphi}$, приводит к нужному тригонометрическому ряду.

Рассмотрим в комплексной плоскости ряд

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами, удовлетворяющими рекуррентным зависимостям

$$1=c_n+\frac{c_{n-1}}{2}+\frac{c_{n-2}}{3}+\cdots+\frac{c_0}{n+1},\quad n=0,\ 1,\ldots \qquad (2)$$

Мы докажем, что ряд (1) сходится внутри круга единичного радиуса ($|z|<1$) и (равномерно) на каждой замкнутой, не содержащей точки $z=1$, дуге окружности этого круга. Мы найдем также, что суммой ряда является $-f(z)$.

Из (2) прежде всего следует

$$c_0=1,\quad c_1=\frac{1}{2}.$$

Докажем, что все *коэффициенты* c_k *положительны*. Для этого вычтем равенство (2) из равенства

$$1=c_{n+1}+\frac{c_n}{2}+\cdots+\frac{c_0}{n+2}.$$

Получим

$$c_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)c_n+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)c_{n-1}+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)c_0. \qquad (3)$$

---

*) Math. Annalen, 1922, t. 87.

Из этой, снова рекуррентной, формулы, ввиду того, что $c_0 = 1$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$, и следует, что $c_k > 0\,(k=0,\ 1, 2,\ldots)$.

Теперь докажем, что $c_{k+1} < c_k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. С этой целью, перепишем равенство (3) в форме

$$\frac{c_0}{n+2} = (c_n - c_{n+1}) + \frac{1}{2}(c_{n-1} - c_n) + \cdots + \frac{1}{n+1}(c_0 - c_1) \qquad (4)$$

и затем, введя обозначение $d_k = c_k - c_{k+1}$, в форме

$$\frac{c_0}{n+2} = d_n + \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{3} d_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n+1} d_0. \qquad (5)$$

Это снова рекуррентное соотношение, и мы имеем также

$$\frac{c_0}{n+3} = d_{n+1} + \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{3} d_{n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2} d_0. \qquad (6)$$

Умножив (5) на $\frac{n+2}{n+3}$ и вычтя результат из (6), найдем

$$d_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{2}\right)d_n + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{3}\right)d_{n-1} + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+1}\,\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right)d_0. \qquad (7)$$

Так как $d_0 = c_0 - c_1 = 1 - \frac{1}{2} > 0$ и

$$\frac{1}{m}\,\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{m+1} = \frac{n+2-m}{m(m+1)(n+3)} > 0, \quad m \leqslant n+1,$$

то из рекуррентного соотношения (7) следует

$$d_k > 0, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

то есть

$$c_k > c_{k+1}, \quad k=0,\ 1,\ldots$$

Наконец, докажем, что

$$c_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Действительно, из равенства (2), ввиду того, что $c_k > 0$, $c_k > c_{k+1}$, следует

$$1 > c_n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right),$$

$$c_n < \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}}.$$

Ввиду расходимости гармонического ряда имеем

$$c_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Теперь мы можем доказать, что *ряд* (1) *сходится (и притом равномерно) на каждой замкнутой дуге окружности* $|z|=1$, *не содержащей точки* $z=1$. Отсюда будет следовать (теорема Абеля!) и сходимость внутри единичного круга $|z| \leqslant 1$.

Действительно, положив $z=e^{i\varphi}$, имеем, если $\pi \geqslant \varphi \geqslant \alpha > 0$,

$$|1+z+z^2+\ldots+z^p| = |1+e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}+\ldots+e^{pi\varphi}| =$$

$$= \left|\frac{1-e^{(p+1)i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right| = \frac{|1-e^{(p+1)i\varphi}|}{\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

На основании теоремы Дирихле, ввиду доказанных выше свойств коэффициентов c_k и только что полученного неравенства, ряд (1) действительно сходится при $|z| \leqslant 1, z \neq 1$.

Найдем теперь сумму ряда (1). Для этого умножим его на

$$-\ln(1-z) = z\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\ldots+\frac{z^n}{n+1}+\ldots\right).$$

Получим

$$-\ln(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = z(c_0+c_1 z+\ldots+$$

$$+c_n z^n+\ldots)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\ldots\right).$$

Выполнив в правой части последнего равенства умножение рядов и воспользовавшись равенствами (2), получим

$$-\ln(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = z(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots) = z\frac{1}{1-z}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{-z}{(1-z)\ln(1-z)}. \qquad (8)$$

Положив $0 < x < 2\pi$, $z=e^{ix}$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{-e^{ix}}{(1-e^{ix})\ln(1-e^{ix})} =$$

$$= \frac{-ie^{i\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\left\{\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\frac{x-\pi}{2}\right\}}.$$

Отделив в последнем равенстве вещественные и мнимые части, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx = \frac{\sin\frac{x}{2}\ln 2\sin\frac{x}{2}-\frac{x-\pi}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\left\{\left(\ln 2\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right\}} \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin nx = \frac{-\cos\frac{x}{2}\ln 2\sin\frac{x}{2}-\frac{x-\pi}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\left\{\left(\ln 2\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right\}}. \tag{10}$$

Ряд, стоящий в левой части равенства (10), очевидно сходится и при $x=0$, $x=2\pi$. Таким образом, полагая

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{-\cos\frac{x}{2}\ln 2\sin\frac{x}{2}-\frac{x-\pi}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\left\{\left(\ln 2\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right\}}, & 0<x<2\pi\\ 0,\ x=0,\ x=2\pi, & \end{cases}$$

имеем разложение

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin nx, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

В то же время, легко показать, ряд $\sum_{m=0}^{\infty} c_n \sin nx$ *не является рядом Фурье для* $S(x)$. Действительно, в этом ряде свободный член равен нулю, а свободный член разложения $S(x)$ в ряд Фурье должен быть равным

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-\cos\frac{x}{2}\ln 2\sin\frac{x}{2}-\frac{x-\pi}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\left\{\left(\ln 2\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right\}}dx,$$

но *последний интеграл не существует*, (*даже в смысле главного значения*) так как подынтегральное выражение при $x\to+0$ является положительной бесконечно большой величиной вида $\frac{-\ln x}{x}$, а при $x\to 2\pi-0$ — отрицательной бесконечно большой вида $\frac{\ln(-x+2\pi)}{(-x+2\pi)}$.

Замечание. Линейные комбинации рядов (9) и (10) приводят к новым примерам функций, разлагающихся в тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье.

§ 5. Пример Гиббса

Известно, что ряд Фурье разрывной функции может сходиться. Например, по теореме Жордана, если $f(x)$ — ограниченная и монотонная на $[0,2\pi]$ функция, то ее ряд Фурье сходится и имеет своей суммой

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \quad 0<x<2\pi,$$

$$\frac{f(+0)+f(2\pi-0)}{2}, \quad x=0, \quad x=2\pi,$$

причем сходимость ряда равномерна в каждом интервале непрерывности $f(x)$. Понятно, что ряд Фурье функции $f(x)$ не может сходиться равномерно в интервале, содержащем точку разрыва функции. Это обстоятельство было отмечено Дюбуа-Реймоном еще в 1873 г., но стало широко известным лишь в 1899 г. благодаря примеру, опубликованному Гиббсом.

Сущность примера, подчеркнем, заключается в том, что в окрестности точки разрыва функции $f(x)$ разность между $f(x)$ и отрезком $S_n(x)$ ее ряда Фурье принимает конечные значения при сколь угодно большом n.

Пусть $f(x)$ периодическая, с периодом 2π, функция, на $(0,2\pi)$ совпадающая с $\frac{\pi-x}{2}$. Ряд Фурье

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots \tag{1}$$

этой функции сходится и его сумма равна $\frac{\pi-x}{2}$, если $0<x<2\pi$ и 0, если $x=0$ или 2π. Точки 0, $\pm 2\pi,\ldots$ являются точками разрыва функции $f(x)$. Мы непосредственно проверим, что в любом интервале, содержащем точку 0, ряд (1) сходится неравномерно, то есть убедимся в том, что остаток $R_n(x)$ ряда (1) не стремится к нулю, если x приближается к нулю, пробегая некоторую надлежаще выбранную последовательность значений $x=x_n$. При $0<x<2\pi$ имеем

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots$$

и

$$R_n(x)=\frac{\pi-x}{2}-\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right)=$$

$$=\frac{\pi-x}{2}-\int\limits_0^x(\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx)\,dx=$$

$$=\frac{\pi-x}{2}-\int\limits_0^x\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right\}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx+I_n(x),$$

где

$$I_n(x)=\int\limits_0^x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cdot\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right\}dx.$$

Займемся оценкой величины I_n. Интегрируя по частям, получим

$$I_n(x)=\frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int\limits_0^x\frac{x^2\cos\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx.$$

Отсюда легко получается оценка

$$|I_n(x)|<\frac{M}{n+\frac{1}{2}},\quad 0\leqslant x\leqslant h<\pi. \tag{2}$$

Из равенства

$$R_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\frac{2\pi}{2n+1}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx+I_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt+I_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)$$

и оценки (2) следует

$$\lim_{n\to\infty}R_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\neq 0,$$

что и свидетельствует о неравномерной сходимости ряда (1).

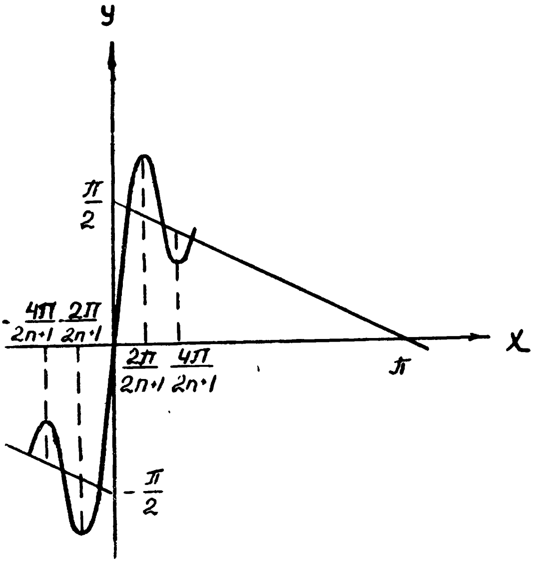

Рис. 12.

На рис. 12 изображены графики функций $f(x)$, $S_n(x)$. Легко проверить, что как раз в точках $\pm\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=1,2,\ldots)$ функция $R_n(x)$ действительно имеет *extrema*. В самом деле,

$$R_n'(x)=-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

§ 6. Особенности ряда Фурье, указанные Дюбуа-Реймоном и Лебегом

Дюбуа-Реймон (1876 г.) впервые указал пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в данной точке. Лебег (1905 г.) указал пример непрерывной функции, разлагающейся в ряд Фурье, который, однако, сходится неравномерно. Фейер указал систематический прием для построения таких особенностей. Мы придерживаемся изложения Валле-Пуссена.

Обозначим

$$\varphi(n,\ x)=2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right).$$

Из предыдущего параграфа, в частности, следует, что $\varphi(n,\ x)$ ограничена по модулю некоторой постоянной A, не зависящей от x и n*.

Имеют место тождества $(m>n)$

$$\varphi(n,\ x)\sin mx=\sum_{r=n}^{1}\frac{\cos(m-r)x}{r}-\sum_{r=1}^{n}\frac{\cos(m+r)x;}{r}\qquad(1)$$

$$-\varphi(n,\ x)\cos mx=\sum_{r=n}^{1}\frac{\sin(m-r)x}{r}-\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin(m+r)x}{r}.\qquad(2)$$

Докажем, что *отрезки разложений, стоящих в правых частях* (1) *и* (2) *на сегменте* $[2k\pi+\varepsilon,\ 2(k+1)\pi-\varepsilon]$ *ограничены по модулю числом* $L(\varepsilon)$, *зависящим только от* ε. Для этого достаточно доказать, что таким свойством обладают суммы

$$\sigma_s=\sum_{r=1}^{s}\frac{\cos(m\pm r)}{r}x,\quad \sum_s=\sum_{r=1}^{s}\frac{\sin(m\pm r)x}{r},$$

$$s=1,\ 2,\ldots$$

линейной комбинацией которых являются отрезки разложений (1), (2). Имеем

$$|\sigma_s|\leqslant|\sigma_s+i\Sigma_s|,\quad |\Sigma_s|\leqslant|\sigma_s+i\Sigma_s|$$

---

* Можно показать более точно, что $|\varphi|\leqslant\pi+2$.

и на основании формулы Эйлера

$$|\sigma_s + i\Sigma_s| = |e^{imx}\sum_{r=1}^{s}\frac{e^{\pm irx}}{r}| = |\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}e^{\pm irx}|. \qquad (3)$$

Но

$$\left|\sum_{r=1}^{s} e^{\pm irx}\right| = \left|\frac{e^{\pm ix}(e^{\pm isx}-1)}{e^{\pm ix}-1}\right| = \left|\frac{e^{\pm\frac{ix}{2}}(e^{\pm isx}-1)}{2i\sin\frac{x}{2}}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

и поэтому, применяя к (3) неравенство Абеля, получим

$$|\sigma_s + i\Sigma_s| < \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Однако, если $x \to 2k\pi$, то существуют отрезки сумм (1) и (2), которые неограниченно возрастают вместе с n. Действительно, при $x = 2k\pi$ сумма (1) содержит отрезок

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r},$$

являющийся отрезком расходящегося (гармонического) ряда; сумма (2) содержит при $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2m}$ отрезок

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{m-r}{m}\,\frac{\pi}{2}\right)}{r} > \sum_{r=1}^{n}\frac{\frac{m-r}{m}}{r} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} - \frac{n}{m} > \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} - 1 \quad (m > n).$$

(Мы воспользовались тем, что $\frac{\sin x}{x}$ убывает при изменении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и поэтому $\sin x > x\cdot\frac{2}{\pi}$).

Рассмотрим теперь две функции

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\varphi(2^{n^3}, x)\sin(2^{(n+1)^3}x), \qquad (4)$$

$$\Psi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(2^{n^3}, \; x) \cos(2^{(n+1)^3} x), \tag{5}$$

определяемые двумя рядами непрерывных функций, сходящимися равномерно на $[0,2\pi]$ ввиду того, что члены этих рядов не больше соответствующих членов сходящегося ряда

$$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ непрерывны. Построим их ряды Фурье и докажем, что ряд Фурье функции $\Phi(x)$ расходится при $x=2k\pi$, а ряд Фурье функции $\Psi(x)$ не может сходиться равномерно в окрестности $x=2k\pi$.

Ввиду равномерной сходимости ряда (4) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \varphi(2^{n^3}, \quad x) \sin(2^{(n+1)^3} x) \sin kx dx.$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы в правой части последнего равенства, на основании равенства (1) сводится к сумме интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} \cos tx \sin kx dx,$$

равных нулю. Таким образом,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) \sin kx dx = 0.$$

Переходя к вычислению интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) \cos kx dx,$$

заметим, что функция

$$\chi_n = \varphi(2^{n^3}, \; x) \sin(2^{(n+1)^3} x),$$

будучи представлена формулой (1), содержит лишь косинусы дуг lx, где

$$2^{(n+1)^3} - 2^{n^3} \leqslant l \leqslant 2^{(n+1)^3} + 2^{n^3},$$

и так как

$$2^{(n+2)^3}-2^{(n+1)^3}>2^{(n+1)^3}+2^{n^3},$$

то при

$$2^{(n+1)^3}-2^{n^3}\leqslant k\leqslant 2^{(n+1)^3}+2^{n^3}$$

получим, что интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x)\cos kx dx$$

равен коэффициенту при $\cos kx$ в представлении $\chi_n(x)$ по формуле (1) и равен нулю, если k не удовлетворяет условию (6).

Таким образом, ряд Фурье для функции $\Phi(x)$ получится, если выписать одно за другим разложения последовательных членов ряда (4) по формуле (1).

Мы видели, что при $x=2k\pi$ сумма (1) содержит отрезок, равный

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}>\sum_{r=1}^{n}\int\limits_r^{r+1}\frac{du}{u}=\int\limits_1^{n+1}\frac{du}{u}>\ln n.$$

Поэтому в ряде Фурье функции $\Phi(x)$ при $x=2k\pi$ будет содержаться группа последовательных слагаемых с суммой большей чем

$$\frac{1}{n^2}\ln 2^{n^3}=n\ln 2,$$

то есть бесконечно возрастающей вместе с n.

Отсюда (на основании критерия Коши) следует расходимость ряда Фурье для функции $\Phi(x)$ при $x=2k\pi$. Указанное выше свойство ряда Фурье функции $\Psi(x)$ доказывается точно так же.

§ 7. Оценка отрезка ряда Фурье

Мы видели в предыдущем параграфе, что ряд Фурье непрерывной функции может быть расходящимся. Более точно было показано, что отрезок ряда Фурье может неограниченно возрастать. Естественно возникает вопрос о возможном порядке роста отрезка ряда Фурье. Ответом на такой вопрос является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — периодическая, интегрируемая функция и*

$$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

$$S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx),$$

где S_n — отрезок ряда Фурье функции $f(x)$. Если

$$|f(x)| \leqslant M, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

то

$$|S_n| < M(A \ln n + B),$$

$$|S'_n| < M(A_1 \ln n + B_1),$$

где A, B, A_1, B_1 — независимые от n постоянные.

Известно (формула Дирихле), что

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \{f(t+x) + f(x-t)\} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

Следовательно,

$$|S_n| \leqslant \frac{2M}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt.$$

Поэтому

$$|S_n| \leqslant M \int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t} \right| dt = M \int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt <$$

$$< M \int_{0} dt + M \int_{1}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dt}{t} = M + M \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi < M + M \ln 2n\pi =$$

$$= M(1 + \ln 2\pi + \ln n) = M(A \ln n + B), \qquad (A = 1).$$

Величина S_n^1 оценивается подобным же образом:

$$S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt;$$

$$| S_n^1 | \leqslant \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt =$$

$$= \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{n}{2} t \sin (n+1) \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt <$$

$$< \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin (n+1) \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt \leqslant M (A_1 \ln n + B_1).$$

Доказанная теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 2. *Если периодическая функция $f(x)$ имеет r-ю производную* и $|f_{(x)}^{(r)}| \leqslant M_r$, то*

$$|f(x) - S_n(x)| < (A \ln n + B) \frac{M_r}{n^r}.$$

Введя обозначение

$$A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

---

* Достаточно, чтобы $f(x)^{(r-1)}$ была кусочно дифференцируемой.

Следовательно, так как допустимо формальное дифференцирование ряда Фурье, имеем, при $r=2q$, для $f^{(2q)}_{(x)}$ (может быть и расходящийся) ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k, \qquad B_k=(-1)^q k^r A_k.$$

Поэтому

$$R_n=f(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k=(-1)^q \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{B_k}{k^r}.$$

Если обозначить через σ_k отрезок ряда Фурье функции $f^{(r)}_{(x)}$, то

$$B_k=\sigma_k-\sigma_{k-1},$$

$$(-1)^q R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_k-\sigma_{k-1}}{k^r}=-\frac{\sigma_n}{(n+1)^r}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r}\right)\sigma_k. \tag{1}$$

По теореме 1

$$|\sigma_k| \leqslant M_r(A \ln k+B),$$

и потому из (1) следует

$$\frac{1}{M_r}|R_n|<\frac{A \ln n+B}{(n+1)^r}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r}\right)(A \ln k+B)=$$

$$=\frac{A \ln n+B}{(n+1)^r}+A \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r}\right)\ln k=$$

$$=\frac{A \ln n+2B}{(n+1)^r}+A \frac{\ln (n+1)}{(n+1)^r}+A \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^r} \ln \frac{k+1}{k}<$$

$$<\frac{A \ln n+2B}{(n+1)^r}+A \frac{\ln (n+1)}{(n+1)^r}+A \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^r}<$$

$$<\frac{A \ln n+2B}{(n+1)^r}+\frac{A \ln (n+1)}{(n+1)^r}+A \frac{1}{rn^r}=\frac{A' \ln n+B'}{n^r}.$$

При $r=2q+1$ все оценки остаются в силе, но надо воспользоваться теоремой 1 в части, касающейся S^1_n.

§ 8. Теорема Лебега о погрешности наилучшего приближения

Говорят, что тригонометрический многочлен

$$T_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \qquad (1)$$

является многочленом наилучшего приближения* непрерывной функции $f(x)$ на $[0,2\pi]$, если коэффициенты этого многочлена удовлетворяют условию

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(x)| = \min. \qquad (2)$$

Если T_n является многочленом наилучшего приближения функции, то величина

$$\rho_n = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(x)|$$

называется погрешностью наилучшего приближения.

Тригонометрический многочлен

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (3)$$

являющийся отрезком ряда Фурье функции $f(x)$, удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx = \min.,$$

но, вообще говоря, не удовлетворяет условию (2), то есть не является наилучшим приближением, и

$$\varphi(n) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - S_n(x)| \geqslant \rho_n.$$

Естественно, возникает вопрос о соотношении между $\varphi(n)$ и ρ_n. Ответ дает теорема Лебега, утверждающая, что

$$\rho_n \geqslant \frac{\varphi(n)}{A \ln n + B},$$

где A, B — независимые от n постоянные.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из теоремы 1 предыдущего параграфа, если обозначить

$$R_n = f(x) - S_n(x), \quad |f(x)| \leqslant M,$$

---

* В смысле Вейерштрасса (в смысле равномерного приближения).

следует оценка

$$|R_n(x)| \leqslant |f(x)| + |S_n(x)| \leqslant M + M(A_1 \ln n + B_1) = \\ = M(A \ln n + B). \qquad (4)$$

Обозначим через Σ_n отрезок ряда Фурье для разности $f(x) - T_n(x)$. Тогда

$$\Sigma_n = S_n - T_n, \quad S_n = \Sigma_n + T_n$$

$$|f - S_n| = |(f - T_n) - \Sigma_n|,$$

и так как $|f - T_n| \leqslant \rho_n$, то на основании (4)

$$|f - S_n| \leqslant \rho_n(\tilde{A} \ln n + \tilde{B}).$$

Следовательно,

$$\varphi(n) = \max_{0 < x < 2\pi} |f - S_n| \leqslant \rho_n(\tilde{A} \ln n + \tilde{B}),$$

то есть

$$\rho_n \geqslant \frac{\varphi(n)}{\tilde{A} \ln n + \tilde{B}}.$$

§ 9. Оценка остатка ряда Фурье

Будем называть *модулем непрерывности* (модулем колебания) функции $f(x)$ величину

$$\omega(\delta) = \max_{|x_2 - x_1| \leqslant \delta} |f(x_2) - f(x_1)|.$$

Например, модулем непрерывности $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$ является $2\delta - \delta^2$, так как

$$|x_2^2 - x_1^2| = |x_2 - x_1|(x_2 + x_1) \leqslant \delta(2x_1 + \delta) \leqslant \delta(2 - \delta).$$

Теорема. *Если $f(x)$ имеет период 2π и модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то для остатка $R_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ справедлива оценка*

$$|R_n(x)| < (A \ln n + B)\, \omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где A, B — независимые от n постоянные.

Частным случаем сформулированной теоремы является утверждение (теорема Лебега):

Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица степени α, то есть

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \lambda |x_2 - x_1|^\alpha, \quad \lambda = \text{const}, \ \alpha > 0,$$

то

$$|R_n(x)| < \frac{\lambda \ln n}{n^\alpha}.$$

Переходим к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию $\psi(x)$, графиком которой является ломаная с вершинами в точках

$$(m\delta,\ f(m\delta)),\ 0<\delta<2\pi,\ m=\ldots-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

На каждом интервале $(m\delta,\ (m+1)\delta)$ $\psi(x)$ является линейной функцией, а ее производная $\psi'(x)$ — постоянной и притом всюду

$$|\psi'(x)|\leqslant\frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

При $m\delta\leqslant x\leqslant m\delta+\delta$ имеет место одно из двух неравенств

$$f(x)-f(m\delta)\leqslant f(x)-\psi(x)\leqslant f(x)-f(m\delta+\delta),$$
$$f(x)-f(m\delta)\geqslant f(x)-\psi(x)\geqslant f(x)-f(m\delta+\delta).$$

Поэтому

$$|f-\psi|<\omega(\delta).$$

Обозначим через R_n, R'_n, R''_n, соответственно, остатки рядов Фурье функций $f(x)$, $f(x)-\psi(x)$, $\psi(x)$. Тогда

$$R_n(x)=R'_n(x)+R''_n(x),$$
$$|R_n(x)|\leqslant|R'_n(x)|+|R''_n(x)|.$$

На основании теоремы 1 § 7 и неравенства (2) имеем оценку

$$|R'_n|<(A\ln n+B)\,\omega(\delta),$$

а на основании теоремы 2 того же параграфа — оценку

$$|R''_n|<(A\ln n+B)\,\frac{\omega(\delta)}{n\delta}.$$

Следовательно,

$$|R_n(x)|<(A\ln n+B)\left(1+\frac{1}{n\delta}\right)\omega(\delta).$$

Взяв $\delta=\frac{\pi}{n}$, получим оценку (1).

Из доказанной теоремы немедленно следует

Теорема Дини-Липшица. *Если модуль непрерывности функции $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta}=0,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно.

§ 10. Теорема С. Н. Бернштейна

С. Н. Бернштейну* принадлежит следующая

---

* С. Н. Бернштейн, Собр. соч., т. I, стр. 217—223.

Теорема. *Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица степени* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то сходятся ряды* $\sum_1^\infty |a_n|$, $\sum_1^\infty |b_n|$ *и, следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней абсолютно и равномерно.*

В то же время С. Н. Бернштейн построил пример функции, удовлетворяющей условию Липшица степени $\alpha < \frac{1}{2}$, ряд Фурье которой не является абсолютно сходящимся всюду.

Переходя к доказательству теоремы С. Н. Бернштейна, докажем предварительно лемму.

Лемма. Пусть тригонометрическая сумма

$$P_n(x) = A_1 \cos k_1 x + \ldots + A_n \cos k_n x,$$

где k_1, k_2, ..., k_n — целые числа, обладает свойством

$$|P_n(x)| < L.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| < L\sqrt{2n}.$$

Действительно,

$$A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(x)^2\,dx < 2L^2.$$

Но, как легко проверить, при условии

$$A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = M$$

сумма $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ достигает максимума при $|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_n| = \sqrt{\frac{M}{n}}$, и этот максимум равен $\sqrt{Mn}$. Так как у нас $M < 2L^2$, то

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| < L\sqrt{2n}$$

и лемма доказана.

На основании сформулированной в предыдущем параграфе теоремы Лебега имеем

$$\left|\sum_{n=m+1}^{2m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n \cos nx +\right.$$

$$\left.+ b_n \sin nx) - \sum_{n=2m+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right| \leqslant \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} (\quad)\right| +$$

$$+\left|\sum_{n=2m+1}^{\infty}(\quad)\right| < \frac{2\lambda \ln m}{m^{\alpha}},$$

$$\left|\sum_{n=2m+1}^{4m}(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| < \frac{2\lambda \ln 2m}{(2m)^{\alpha}}$$

и т. д.

Поэтому на основании леммы

$$\sum_{n=m+1}^{2m}(|a_n| + |b_n|) < \frac{4\lambda \ln m}{m^{\alpha-{}^1/_2}},$$

$$\sum_{n=2m+1}^{4m}(|a_n| + |b_n)| < \frac{4\lambda \ln 2m}{(2m)^{\alpha-{}^1/_2}}, \ldots$$

Значит

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \frac{4\lambda}{m^{\alpha-{}^1/_2}}\left\{\ln m + \frac{\ln 2m}{2^{\alpha-{}^1/_2}} + \frac{\ln 4m}{4^{\alpha-{}^1/_2}} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{4\lambda}{m^{\alpha-{}^1/_2}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-{}^1/_2}}\right)}\left\{\ln m + \frac{\ln 2}{2^{\alpha-{}^1/_2} - 1}\right\}$$

и, следовательно, при $m \to \infty$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \to 0.$$

Построение упомянутого выше примера С. Н. Бернштейна опирается на некоторые факты теории квадратичных вычетов и теории приближения функций.

§ 11. Понятие двойного ряда Фурье

Двойным рядом Фурье функции $f(x, y)$, интегрируемой в квадрате $Q: 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, будем называть ряд

$$\sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\{a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny\}, \qquad (1)$$

где

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & m = n = 0, \\ \frac{1}{2}, & m > 0,\ n = 0;\ m = 0,\ n > 0, \\ 1, & m > 0,\ n > 0, \end{cases}$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy,$$

$$b_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y)\sin mx\cos ny\,dxdy,$$

$$c_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y)\cos mx\sin ny\,dxdy, \qquad (2)$$

$$d_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y)\sin mx\sin ny\,dxdy.$$

Отрезком ряда (1) будем называть сумму

$$S_{\mu\nu}=\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\lambda_{mn}\{a_{mn}\cos mx\cos ny+\ldots+ + d_{mn}\sin mx\sin ny\}. \qquad (3)$$

Ряд (1) называется сходящимся к $S(x, y)$, если для любого наперед данного $\varepsilon>0$

$$|S(x, y)-S_{\mu\nu}|<\varepsilon,\ \mu>N,\ \nu>N.$$

Если подставить в (3) значения λ_{mn} и значения (2) коэффициентов, то получится

$$S_{\mu\nu}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\lambda_{mn}\iint\limits_Q f(\alpha, \beta)\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta)d\alpha d\beta=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(\alpha, \beta)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{m=0}^{\mu}\cos m(x-\alpha)\right\}\left\{\frac{1}{2}+ +\sum_{n=0}^{\nu}\cos n(y-\beta)\right\}d\alpha\,d\beta= \qquad (4)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_Q f(\alpha, \beta)\frac{\sin\frac{(2\mu+1)(x-\alpha)}{2}\sin\frac{(2\nu+1)(y-\beta)}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{y-\beta}{2}}d\alpha d\beta.$$

Последнее выражение можно представить в удобном для исследования виде, если предположить, что мы и сделаем, функцию $f(x, y)$ *периодической* в том смысле, что во всей плоскости

$$f(x, y+2\pi)=f(x+2\pi, y)=f(x, y).$$

Для периодической функции будем иметь

$$S_{\mu\nu}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} \int\limits_{y-\pi}^{y+\pi} f(\alpha, \beta) \frac{\sin \frac{(2\mu+1)(x-\alpha)}{2} \sin \frac{(2\nu+1)(y-\beta)}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2} \sin \frac{y-\beta}{2}} d\alpha d\beta.$$

Выполнив замену переменных

$$x - \alpha = -2u, \ y - \beta = -2v,$$

получим

$$S_{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u, \ y+2v) \times$$

$$\times \frac{\sin(2\mu+1)u \sin(2\nu+1)v}{\sin u \sin v} du dv.$$

Наконец, если разбить квадрат $-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2}$ на четыре квадрата с общей вершиной в точке (0, 0) и ввести обозначение

$$F(x, 2u, y, 2v) = f(x+2u, \ y+2v) + f(x-2u, \ y+2v) +$$
$$+ f(x-2u, \ y-2v) + f(x+2u, \ y-2v),$$

то получим окончательную формулу

$$S_{\mu\nu}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(x, \ 2u, \ y, \ 2v) \frac{\sin(2\mu+1)u \sin(2\nu+1)v}{\sin u \sin v} du dv. \quad (5)$$

§ 12. О теореме локализации

Теория двойных рядов Фурье не является тривиальным обобщением теории рядов Фурье функций одного переменного. Например, как мы покажем, для двойных рядов Фурье не имеет места теорема аналогичная теореме о локализации (Римана), которая для обычных рядов Фурье гласит:

Поведение ряда Фурье (в смысле сходимости) функции $f(x)$ (интегрируемой или даже только суммируемой) зависит лишь от поведения $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x.

Определим в квадрате $Q: 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ функцию

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, \\ 0, & \frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, \\ \psi(y), & \pi < x < \frac{3}{2}\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

где $\psi(y)$ — непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция, для которой ряд Фурье при $y = \pi$ расходится.

Для функции $f_0(x, y)$ формула (5) предыдущего параграфа дает

$$S_{\mu\nu}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \{\psi(\pi + 2v) +$$

$$+ \psi(\pi - 2v)\} \frac{\sin(2\mu + 1)u \sin(2\nu + 1)v}{\sin u \sin v} dudv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [\psi(\pi+2v)+\psi(\pi-2v)] \frac{\sin(2\nu + 1)v}{\sin v} dv \right\} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\mu + 1)u}{\sin u} du \right\} = \frac{1}{\pi} S_\nu^*(\pi) \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\mu + 1)u}{\sin u} du,$$

где $S_\nu^*(\pi)$ — отрезок ряда Фурье функции $\psi(y)$ при $y = \pi$. Следовательно, при фиксированном μ и $\nu \to \infty$ величина

$$S_{\mu\nu}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

не имеет предела.

Пусть теперь $f(x, y)$ — любая функция, ряд Фурье которой сходится в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Функция

$$f_1(x, y) = f(x, y) + f_0(x, y)$$

будет совпадать с $f(x, y)$ в круге радиуса $\frac{\pi}{2}$ с центром в $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и в то же время ее ряд Фурье будет расходиться в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Таким образом, для функции $f_1(x, y)$ теорема локализации не верна.

ГЛАВА VI

В настоящей главе, следуя Н. Г. Чеботареву *, мы докажем некоторые классические теоремы относительно интегралов вида

$$\int R(x,\ y)\,dx, \tag{1}$$

где $y=y(x)$ — алгебраическая функция, R — рациональная функция обоих аргументов.

Интегралы вида (1) называются абелевыми интегралами. К ним, в частности, принадлежат интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{2}$$

$$\int x^m (a+bx^n)\,dx. \tag{3}$$

Напомним, что интеграл (2) с помощью подстановок Эйлера всегда можно привести к интегралу от рациональной функции. Поэтому интеграл (2) выражается через элементарные функции. Интеграл (3) (интеграл от биномиального дифференциала) выражается через элементарные функции, если хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Классическая теорема П. Л. Чебышева гласит: „Если ни одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ не является целым числом, то интеграл (3) не выражается через элементарные функции". Нашей основной целью является доказательство этой теоремы.

§ 1. Об элементарных функциях

Под элементарными функциями мы понимаем алгебраические функции от независимой переменной x и функ-

---

* Н. Г. Чеботарев, О выражении абелевых интегралов через элементарные функции. „Усп. мат. наук", т. 2, вып. 2, 1947; Собр. соч., т. 1.

ций $\ln \omega_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, k$, где $\omega_i(x)$, в свою очередь, алгебраические, не обязательно вещественные, функции.

Очевидно, что элементарными являются функции

$$x^m,\ (a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \ldots + a_k x^{m_k})^p,$$
$$\ln \frac{\alpha_1 x^{m_1} + \alpha_2 x^{m_2} + \ldots + \alpha_k x^{m_k}}{\beta_1 x^{n_1} + \beta_2 x^{n_2} + \ldots + \beta_q x^{n_q}},$$

где все показатели рациональные числа. Однако, элементарными являются и функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$. Действительно, из соотношения

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = x$$

находим

$$e^{it} = ix + \sqrt{1 - x^2}$$
$$t = \arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2}),$$

а из соотношения

$$\operatorname{tg} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i(e^{i} + e^{-it})} = x$$

находим

$$e^{2it} = \frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{(1 + ix)^2}{1 + x^2},$$
$$t = \operatorname{arctg} x = -\frac{i}{2} \ln \frac{(1 + ix)^2}{1 + x^2}.$$

Доказывать элементарность $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$, очевидно, нет необходимости.

§ 2. Классификация абелевых интегралов

Мы будем записывать абелев интеграл в виде

$$\int_a^x R(t, y(t))dt \tag{4}$$

и называть его интегралом 1-го рода, если он при всевозможных значениях x конечен. Так, например, интеграл

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$$

является абелевым интегралом первого рода.

Интеграл (4) называется абелевым интегралом 2-го рода, если при некоторых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_k$ верхнего предела он может принимать бесконечные значения, но лишь потому, что в окрестности точки $x = a_i$ его разложение по степеням $x - a_i$ содержит члены вида $(x - a_i)^{-r}$ $(r > 0)$. Абелев интеграл второго рода называется элементарным, если $k = 1$. Интеграл

$$\int_0^x \frac{tdt}{(1-t^2)^{3/2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

является абелевым интегралом второго рода.

Элементарным абелевым интегралом 2-го рода является, например, интеграл

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t)^3}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

Наконец, абелев интеграл называется интегралом 3-го рода, если он имеет и логарифмические особенности. Интеграл 3-го рода называется элементарным, если он обладает только двумя логарифмическими особенностями (можно доказать, что это минимальное число особенностей для интеграла 3-го рода).

Примером абелевого интеграла 3-го рода может служить интеграл

$$\int_0^x \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

имеющий логарифмические особенности при $x = \pm i$, $x = \infty$. Важность приведенной классификации подчеркивается теоремой: *„всякий абелев интеграл линейно выражается через абелевы интегралы 1-го рода и элементарные абелевы интегралы 2-го и 3-го рода“*, которую мы не будем доказывать*.

§ 3. Поле рациональных функций и его расширение

Совокупность всех рациональных функций переменных $x, y, \ldots$ называют полем и обозначают через $k(x, y, \ldots)$. Если элемент $z(x, y, \ldots)$ не принадлежит $k(x, y, \ldots)$, то совокупность всех рациональных функций от z с коэффициентами из $k(x, y, \ldots)$ называют расширением поля $k(x, y, \ldots)$ и

---

* См., например, Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций, М-Л., 1948, гл. VIII.

обозначают через $k(x, y, ...; z)$. Таким образом полученное поле можно расширить присоединением нового элемента и т. д. Расширение $k(x, y, ...; z)$ называется простым алгебраическим, если z удовлетворяет соотношению вида

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0,$$

где A_i не все одновременно равны нулю и принадлежат полю $k(x, y, ...)$.

Многочлен $f(z)$ можно считать неприводимым в поле $k(x, y, ...)$, то есть непредставимым в виде $f_1(z) \cdot f_2(z)$.

В теории алгебраических функций доказывается *

Теорема. *Всякое конечное алгебраическое расширение* $k(x, y, ...; z_1, z_2, ... z_m)$ *поля* $k(x, y, ...)$ *есть простое расширение. То есть: присоединение к полю* $k(x, y, ...)$ *корней* $z_1, z_2 ..., z_m$ *неприводимых уравнений*

$$f_1(z) = 0, ..., f_m(z) = 0$$

эквивалентно присоединению некоторого одного корня одного неприводимого уравнения

$$f(z) = 0.$$

Мы поясним теорему только на одном элементарном примере. Пусть к полю $k(x)$ присоединяются элементы $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, являющиеся корнями неприводимых уравнений

$$z^2 - x = 0, \quad z^2 - (x+1) = 0.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x},$$

то, полагая

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = u,$$

найдем

$$\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right).$$

Легко проверить, что u является корнем неприводимого уравнения

$$u^4 - 2(1-2x)u^2 + 1 = 0.$$

§ 4. Теорема Лиувилля

Лиувилль доказал справедливость утверждения:

Теорема 1. *Если абелев интеграл*

$$\int_a^x R(x, y(x))\,dx \tag{1}$$

---

[*] См. Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций, гл. I.

выражается через элементарные функции, то обязательно

$$\int_a^x R(x, y(x))\, dx = \omega_0(x) + \sum_{r=1}^{k} a_r \ln \omega_r(x), \qquad (2)$$

где ω_0, $\omega_1,\dots,\omega_k$ *— некоторые алгебраические функции* x, *возможно и не принадлежащие полю* $k(x, y)$, a_1, $a_2\dots,a_k$*— постоянные.*

Доказательство. Пусть

$$\int_a^x R(x, y(x))\, dx = \Phi(x, \ln \omega_1,\dots, \ln \omega_k). \qquad (3)$$

Мы будем предполагать, что x, $\ln \omega_1(x),\dots, \ln \omega_k(x)$ не связаны никаким алгебраическим соотношением вида

$$\Psi(x, \ln \omega_1,\dots, \ln \omega_k) = 0, \qquad (4)$$

так как в противном случае мы могли бы уменьшить число k.

Продифференцировав равенство (3) по x, получим

$$R(x, y(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \ln \omega_1} \frac{\omega_1'}{\omega_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \ln \omega_k} \frac{\omega_k'}{\omega_k}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) имеет вид (4) и потому должно быть тождественным относительно величин $\ln \omega_\nu$. Следовательно, дифференцируя по $\ln \omega_\nu$, получим

$$0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \ln \omega_\nu} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \ln \omega_1 \partial \ln \omega_\nu} \frac{\omega_1'}{\omega_1} + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \ln \omega_k \partial \ln \omega_\nu} \frac{\omega_k'}{\omega_k} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \ln \omega_\nu}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ln \omega_\nu} = a_\nu \,(= \text{const}). \qquad (6)$$

Последнее соотношение является тождеством, ибо в противном случае оно давало бы нетождественное соотношение вида (4), что исключено. Из (6), очевидно, следует (2) и теорема доказана.

Теорема 2. *В равенстве* (2) *можно считать* ω_0, ω_1, $\dots,\omega_k$ *функциями из поля* $k(x, y)$.

Действительно, если функции ω_0, $\omega_1,\dots$, ω_k (или некоторые из них) не принадлежат полю $k(x, y)$, то присоединение этих функций к полю $k(x, y)$, в силу теоремы § 3, эквивалентно расширению $k(x, y; z)$.

Пусть

$$F(x,\ y;\ z)=0 \tag{7}$$

— неприводимое в поле $k(x,\ y)$ уравнение, которому удовлетворяет z и $z_1,\ z_2, \ldots,\ z_h$ — корни этого уравнения. Из уравнения (7) найдем

$$y=\varphi(x,\ z),$$

и так как уравнение (7) неприводимо, то разность $y-\varphi(x,\ z)$ должна делиться на $F(x,\ y;\ z)$. Отсюда следует, что

$$y=\varphi(x,\ z_1)=\varphi(x,\ z_2)=\ldots=\varphi(x,\ z_h). \tag{8}$$

Пусть

$$\omega_\nu=\psi_\nu(x,\ z).$$

Тогда, если обозначить

$$\omega_{\nu,\ \mu}=\psi_\nu(x,\ z_\mu),$$

на основании (8) одновременно с равенством

$$\int\limits_a^x R\,dx=\omega_0+a_1\ln\omega_1+\ldots+a_k\ln\omega_k$$

будут иметь место равенства

$$\int\limits_a^x R\,dx=\omega_{0,\ \mu}+a_1\ln\omega_{1,\ \mu}+\ldots+a_k\ln\omega_{k,\ \mu}.$$

Просуммировав последние равенства, найдем

$$\int\limits_a^x R\,dx=\frac{1}{h}\left\{\sum_{\mu=1}^{h}\omega_{0,\ \mu}+a_1\ln\prod_{\mu=1}^{h}\omega_{1,\ \mu}+\ldots+a_k\ln\prod_{\mu=1}^{h}\omega_{k,\ \mu}\right\}.$$

Функции

$$\sum_{\mu=1}^{h}\omega_{0,\ \mu},\quad \prod_{\mu=1}^{h}\omega_{1,\ \mu},\ldots,\quad \prod_{\mu=1}^{h}\omega_{k,\ \mu}$$

являются симметрическими функциями корней уравнения (7) и поэтому они на основании известной теоремы алгебры рационально выражаются через коэффициенты этого уравнения, то есть являются функциями поля $k(x,\ y)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *В соотношении*

$$\int\limits_a^x R(x,\ y(x))\,dx=\omega_0+a_1\ln\omega_1+\ldots+a_k\ln\omega_k, \tag{9}$$

можно полагать коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$ *несвязанными линейным соотношением вида*

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_k m_k = 0, \tag{10}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — *рациональные числа.*

Действительно, при наличии связи (10) мы имели бы

$$\int_a^x R(x,\ y(x))\,dx = \omega_0 + \frac{a_2}{m_1}\ln\frac{\omega_2^{m_1}}{\omega_1^{m_2}} + \ldots + \frac{a_k}{m_1}\ln\frac{\omega_k^{m_1}}{\omega_1^{m_k}},$$

то есть, при надлежащем изменении обозначений,

$$\int_a^x R(x,\ y(x))\,dx = \omega_0 + b_1 \ln\tilde{\omega}_1 + \ldots + b_{k-1}\ln\tilde{\omega}_{k-1}, \tag{11}$$

где $\tilde{\omega}_i$ — алгебраические функции, так как m_i — рациональные числа. Если между коэффициентами $b_1, \ldots, b_{k-1}$ уже нет связи вида (10), то теорема доказана, если же такая связь существует, то повторением приведенных рассуждений мы в конце концов придем к теореме.

Теорема 4. *Если абелев интеграл выражается через элементарные функции и, следовательно, имеет место равенство* (9), *то всякая точка, обращающая в нуль или бесконечность хотя бы одну из функций* $\omega_1, \ldots, \omega_k$ *является логарифмической особенностью рассматриваемого интеграла.*

Пусть

$$\int_a^x R(x,\ y)\,dx = \omega_0(x) + a_1 \ln\omega_1(x) + \ldots + a_k\,\mathrm{n}\,\omega_k(x) \tag{12}$$

и пусть $\omega_1(x)$ обращается в нуль в некоторой точке x_0. Без ограничения общности можно считать, что $x = 0$.

Так как $\omega_1(x)$ алгебраическая функция, то

$$\omega_1(x) = x^{m_1}\varphi_1(x),\ \ \varphi_1(0) \neq 0\ \ (\neq \infty),$$

где m_1 — рациональное число *.

Точно также

$$\omega_i(x) = x^{m_i}\varphi_i(x),\ \ i > 1,\ \ \varphi_i(0) \neq 0\ \ (\neq \infty),$$

где m_i — рациональные числа (некоторые из них, или даже все, могут быть равными нулю), $\varphi_i(x)(i = 1,2,..,)$ — алгебраические функции **.

---

* См. главу II, § 4 — 5.

** Как отношения двух алгебраических функций.

Таким образом,

$$\int_a^x R(t,y(t))dt = \omega_0(x) + (a_1m_1 + \ldots + a_k m_k)\ln x + \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i(x).$$

В силу теоремы 3

$$a_1m_1 + \ldots + a_k m_k \neq 0,$$

и так как, кроме того, $\omega_0(x)$, как алгебраическая функция, не может содержать логарифмы, то теорема доказана.

Теорема 5. *Абелев интеграл 1-го рода не может быть выражен через элементарные функции.*

Действительно, из предыдущей теоремы следует, что, будучи ограниченным, интеграл 1-го рода, если он выражается через элементарные функции, не может содержать логарифмов. Поэтому если интеграл 1-го рода выражается через элементарные функции, то он является элементом поля $k(x,y)$. Но элемент поля $k(x, y)$, если он не является тождественно постоянной, не может быть ограниченным, в то время как интеграл 1-го рода — ограниченная функция.

Теорема 6. *Если абелев интеграл второго рода выражается через элементарные функции, то он является элементом поля* $k(x, y)$. Доказательство теоремы — такое же, как и предыдущей (без заключительной фразы).

§ 5. Теорема П. Л. Чебышева

Интеграл

$$\int x^m(x^n + 1)^p dx \tag{1}$$

не выражается через элементарные функции, если все числа

$$p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n} + p$$

не целые.

Доказательство. Заметим, что интеграл (1) можно заменить интегралом

$$\int x^{-r}(x+1)^{-s}dx, \tag{2}$$

где $0 < r < 1$, $0 < s < 1$. Действительно, положив в (1) $x^n = z$, получим

$$\int x^m(x^n+1)^p dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(z+1)^p dz =$$

$$= \frac{1}{n}\int z^{-r}(z+1)^{-s}dz.$$

Из легко проверяемых равенств

$$(-r+1)\int z^{-r}(z+1)^{-s}dz = z^{-r+1}(z+1)^{-s+1} +$$

$$+(r+s-2)\int z^{-r+1}(z+1)^{-s}dz,$$

$$z^{-r+1}(z+1)^{-s+1}=(s-1)\int z^{-r}(z+1)^{-s}dz+$$

$$+(2-r-s)\int z^{-r}(z+1)^{-s+1}dz$$

следует, что в случае необходимости можно r или s, или оба числа, увеличить или уменьшить на единицу.

Рассмотрим теперь два возможных случая *.

1. $r+s>1$. В этом случае интеграл остается ограниченным при $x\to 0$ (так как $r<1$), при $x\to -1$ (так как $s<1$) и при $x\to\infty$ (так как $r+s>1$) и, следовательно, является абелевым интегралом 1-го рода. Значит, по теореме 5, он не может быть выражен через элементарные функции.

2. $r+s<1$. Как и в рассмотренном случае, интеграл остается ограниченным при $x\to 0$ и $x\to -1$. Заметив, что при $|x|<1$ справедливо разложение

$$\int x^{-r}(x+1)^{-s}dx=\frac{1}{1-r}x^{1-r}-\frac{s}{2-r}x^{2-r}+\ldots, \tag{3}$$

а при $|x|>1$ — разложение

$$\int x^{-r}(x+1)^{-s}dx=\int x^{-r-s}(1+x^{-1})^{s}\,dx=$$

$$=\frac{1}{1-r-s}x^{1-r-s}+\frac{s}{r+s}x^{-r-s}+\ldots, \tag{4}$$

мы можем утверждать, что выражение

$$x^{s+r-1}\int x^{-r}(x+1)^{-s}dx \tag{5}$$

остается ограниченным. Интеграл (2) в рассматриваемом случае является абелевым интегралом второго рода и, по теореме 6, если бы он выражался через элементарные функции, то был бы алгебраической функцией. Но тогда и выражение (5) было бы алгебраической функцией, а это невозможно, так как такая функция не может быть ограниченной, в то время как выражение (5), как мы видели, ограничено.

Таким образом, теорема П. Л. Чебышева полностью доказана.

---

* $r+s=1$ исключается, так как $r+s=1-\left(p+\frac{m+1}{n}\right)$, а $p+\frac{m+1}{n}$ предположено не целым.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава VI

На 45 стр. ошибочно перевернут рис 9. Надо повернуть его на 180°.

ГЕРШОН ИХЕЛЕВИЧ ДРИНФЕЛЬД

ДОПОЛНЕНИЯ К ОБЩЕМУ КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Редактор *Д. А. Вайнберг.*
Технический редактор *А. С. Трофименко.*
Корректор *И. А. Калачева.*

Подпис. к печати 18/VI 1958 г. БЦ 05984. Формат $60\times92^1/_{16}$. Объем: 3,75 бум. л.,
7,5 печ. л., 4,43 уч.-изд. л. Тираж 5000. Зак. 970. Цена 1 руб. 55 коп.

Типография Издательства Харьковского государственного университета
им. А. М. Горького, Университетская, 16.

Новая цена
— р. 15 к.

Цена ~~1 руб. 55 коп.~~

ХГУ